

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Fusionsenergie</b>	<b>3</b>
1.1	Fusionsreaktionen . . . . .	3
1.2	Fusionsprozesse in Sternen . . . . .	6
1.3	Fusionsprozesse im Labor . . . . .	8
1.4	Myon-katalysierte Fusion . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Fusion durch Trägheitseinschluss</b>	<b>15</b>
2.1	Fusionskriterium und Energiebilanz . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Zündbedingung für Fusion mit magnetischem Einschluss</b>	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>Magnetischer Einschluss</b>	<b>29</b>
4.1	$\Theta$ -Pinch . . . . .	29
4.2	Z-Pinch . . . . .	34
4.3	Screw-Pinch, Reversed-Field-Pinch . . . . .	36
4.4	Hochbeta-Plasmen im Detail: Z- und $\Theta$ -Pinch Experimente . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Stabilität von MHD-Gleichgewichten</b>	<b>43</b>
<b>6</b>	<b>Der toroidale Einschluss von Plasmen</b>	<b>53</b>
6.1	Das Tokamak-Prinzip . . . . .	55
6.2	Stabilität gegen stromgetriebene Moden . . . . .	56
6.2.1	$\xi(a) \neq 0$ , externer Kink . . . . .	58
6.2.2	$\xi(a) = 0$ , interner Kink . . . . .	58
6.3	Das Tokamak-Gleichgewicht . . . . .	61
6.4	Der Stellarator . . . . .	66
6.4.1	Das Stellaratorgleichgewicht . . . . .	69
6.4.2	Analogie zur Mechanik periodischer Systeme . . . . .	69
<b>7</b>	<b>Neoklassischer Transport in toroidalen Systemen</b>	<b>71</b>
7.1	Klassischer Transport . . . . .	71
7.2	Neoklassischer Transport im Tokamak . . . . .	73
7.3	Neoklassischer Transport im Stellarator . . . . .	78
7.4	Auswirkungen neoklassischer Effekte auf den Plasma- strom . . . . .	81
<b>8</b>	<b>Anomaler Transport</b>	<b>85</b>
8.1	Fluktuationen in Fusionsplasmen . . . . .	85
8.2	Fluktuationsinduzierter Transport . . . . .	86

8.3	Driftwellen . . . . .	89
8.4	Destabilisierung und nichtlineare Sättigung . . . . .	90
8.5	ITG-Moden . . . . .	91
<b>9</b>	<b>Plasmaheizung</b>	<b>95</b>
9.1	Neutralteilchen-Injektion (NBI) . . . . .	96
9.2	Wellenheizung . . . . .	98
9.2.1	Dämpfung von Wellen . . . . .	98
9.2.2	Elektronen-Cyclotron-Resonanz-Heizung (ECRH) . . . . .	104
9.2.3	Lower-Hybrid-Heizung (LH) . . . . .	105
9.2.4	Ionen-Cyclotron-Resonanz-Heizung (ICRH) . . . . .	106
9.3	“Nicht-induktiver” Stromtrieb . . . . .	106
9.3.1	Stromtrieb mit Neutralinjektion . . . . .	107
9.3.2	Stromtrieb mit Wellen . . . . .	108
<b>10</b>	<b>Diagnostik von Fusionsplasmen</b>	<b>111</b>
10.1	Einführung . . . . .	111
10.2	Elektromagnetische Messungen . . . . .	112
10.3	Passive Strahlungsmessungen . . . . .	114
10.4	Aktive Strahlungsmessungen . . . . .	119
10.5	Teilchen-Messungen . . . . .	122
<b>11</b>	<b>Experimental results from Tokamaks</b>	<b>127</b>
11.1	Tokamak plasmas . . . . .	127
11.1.1	Components of a tokamak . . . . .	127
11.1.2	Divertor Tokamaks . . . . .	128
11.2	Tokamak plasma discharges . . . . .	129
11.3	Experimental results . . . . .	130
11.3.1	Confinement and transport . . . . .	130
11.3.2	Confinement improvement . . . . .	132
11.3.3	Summary and Outlook . . . . .	140

# Kapitel 1

## Fusionsenergie

### 1.1 Fusionsreaktionen

Wir wollen uns nun mit der Energiegewinnung durch Kernfusion beschäftigen. Dazu werden wir zunächst allgemeine Grundtatsachen über Fusionsprozesse kennenlernen. Darauf folgt eine Beschreibung von Fusionsreaktionen in den Sternen und im Labor.

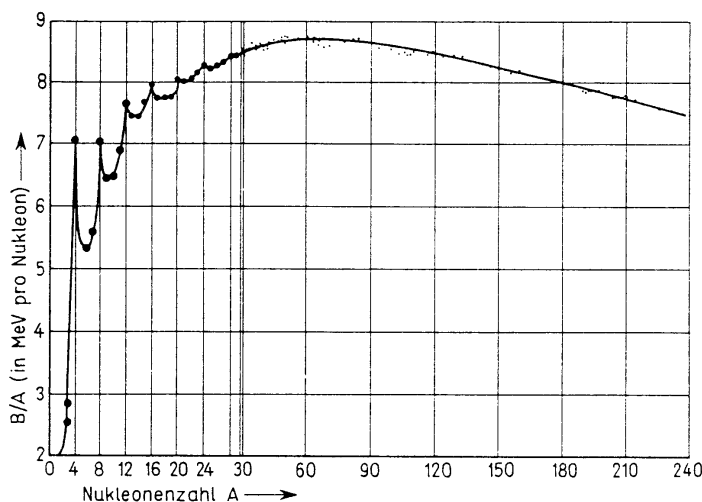


Abbildung 1.1: Verlauf der Bindungsenergie pro Nukleon im Kern als Funktion der Kernmasse.

**Bindungsenergie.** Die Massen einzelner Atomkerne lassen sich heute sehr genau bestimmen. Dabei stellt man fest, dass die Masse eines Kerns aus  $N$  Neutronen und  $Z$  Protonen immer etwas kleiner ist als die Summe der Massen seiner Bestandteile. Dieser sogenannte Massendefekt entspricht einer Bindungsenergie  $B(N, Z) = [Nm_n + Zm_p - m(N, Z)]c^2$ . Hierbei ist  $m_n$  die Masse eines Neutrons,  $m_p$  die Masse eines Protons und  $m(N, Z)$  die Masse des entsprechenden Kerns. Nach dieser Definition ist  $B$  eine positive Größe, die oft in Einheiten von MeV angegeben wird. Es zeigt sich, dass die Bindungsenergie (mit Ausnahme der leichtesten Kerne) in etwa proportional zur Massenzahl  $A = N + Z$  ist, wie in Abb. 1.1 abzulesen ist. Hierbei nimmt  $B/A$  für  $A \approx 60$  sein Maximum von rund 9 MeV/Nukleon an. Das bedeutet, dass sowohl durch Verschmelzung (Fusion) leichter Kerne als auch durch Spaltung (Fission) schwerer Kerne Energie gewonnen werden kann. Die freigesetzte Energie pro Elementarprozess liegt hierbei im MeV-Bereich, d. h. etwa 6 Größenordnungen über dem entsprechenden Wert von chemischen Reaktionen (z. B. Verbrennung fossiler Energieträger). Bei den leichten Kernen fällt auf, dass  ${}^4_2\text{He}$  mit  $B/A = 7.07 \text{ MeV/Nukleon}$  ein besonders fest gebundenes System darstellt. Ähnliches gilt für Kerne, die sich aus mehreren  ${}^4_2\text{He}$ -Kernen zusammengesetzt gedacht werden können.

**Überwindung der Coulomb-Barriere.** Ein konkretes Beispiel für eine Fusionsreaktion, die  ${}^4_2\text{He}$  als Endprodukt liefert, ist die Verschmelzung von Deuterium ( ${}^2_1\text{H}$  bzw.  $D$ ) und Tritium ( ${}^3_1\text{H}$  bzw.  $T$ ) gemäß der Gleichung  $D + T \rightarrow {}^4_2\text{He} + n + 17.6\text{MeV}$ . Bevor es jedoch zu einer Fusionsreaktion kommen kann, müssen die Reaktionspartner die relativ hohe Coulomb-Barriere von rund 415keV überwinden (siehe Abb. 1.2). Letztere kann man abschätzen durch die elektrostatische Energie  $E_C = e^2/(4\pi\epsilon_0 r_a)$  zweier einfach geladener Teilchen im Abstand  $r_a$ , bei dem sie sich gerade “berühren”. Die Kernradien werden dabei recht gut durch die Formel  $r_K = A^{1/3}r_0$  mit  $r_0 = 1.35 \times 10^{-15}\text{m}$  beschrieben. Hieraus ergibt sich die schon genannte Höhe des Coulomb-Walls. Letztere entspricht einer Temperatur von über 4 Milliarden Grad! Glücklicherweise kommt es in der Praxis auch schon bei wesentlich geringeren Temperaturen von etwa 100 Millionen Grad zu nennenswerten Fusionsraten. Dies hat zwei Gründe, auf die wir im Folgenden etwas näher eingehen wollen.

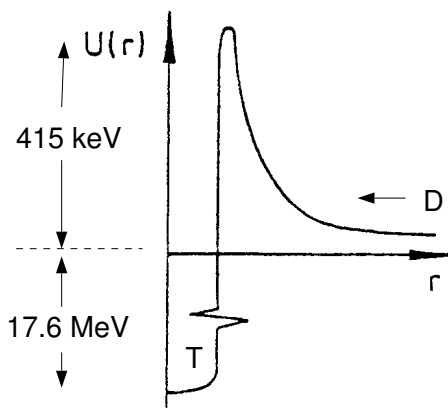


Abbildung 1.2: Kernpotential und Coulomb-Barriere für die  $D$ - $T$ -Reaktion.

**Reaktionsparameter.** Zur Berechnung der mittleren Fusionsraten eines thermischen Plasmas ist es sinnvoll, ins Schwerpunktsystem der beiden Stoßpartner überzugehen. Beschreiben wir die Bewegung der zwei Teilchen  $a$  und  $b$  durch die Schwerpunktschwindigkeit.

$$\vec{V} = \frac{m_a \vec{v}_a + m_b \vec{v}_b}{m_a + m_b} \quad (1.1)$$

und die Relativgeschwindigkeit  $\vec{u}$

$$\vec{u} = \vec{v}_a - \vec{v}_b, \quad (1.2)$$

so lässt sich die gesamte kinetische Energie wie folgt ausdrücken:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m_a v_a^2 + \frac{1}{2}m_b v_b^2 = \frac{1}{2}(m_a + m_b)V^2 + \frac{1}{2}m_r u^2 \quad (1.3)$$

wobei  $m_r = m_a m_b / (m_a + m_b)$  die reduzierte Masse bedeutet. Zur Überwindung der Coulomb-Barriere steht jedoch nur die Relativenergie  $E_r = m_r u^2 / 2$  zur Verfügung. Gehen wir zum Beispiel von einem ruhenden Deuteriumkern ( $v_D = 0$ ) der Masse  $m_D$  und einem relativ dazu bewegten Tritiumkern der Masse  $m_T = 3/2 m_D$  und Geschwindigkeit  $v_T$  aus, so erhalten wir eine Gesamtenergie von  $E_{ges} = 1/2 m_T v_T^2$ . Davon steht jedoch nur  $E_{rel} = 1/2 m_r v_T^2 = 2/5 E_{ges}$  zur Verfügung. Zur Erzeugung einer Schwerpunktsenergie von 400keV muss das Tritium also bei ruhendem Deuterium-Target auf ca. 1MeV beschleunigt werden. Im Allgemeinen werden

die beiden Teilchensorten nicht monoenergetisch vorliegen, sondern die Geschwindigkeiten mit einer Verteilungsfunktion  $f_a$  bzw.  $f_b$  verteilt sein. Dann ergibt sich die Reaktionsrate  $R_{ab}$ , d. h. die Zahl der Fusionsreaktionen pro Volumen und Zeiteinheit aus

$$R_{ab} = n_a n_b \langle \sigma_{FUS}(u) u \rangle \quad (1.4)$$

wobei die Klammern den Mittelwert über die Verteilungsfunktionen bedeuten. In der Fusionsforschung wird dieser Ratenkoeffizient  $\langle \sigma u \rangle$  auch als *Reaktionsparameter* bezeichnet. Gemäß den obigen Ausführungen hängt  $\sigma$  nur vom Betrag der Relativgeschwindigkeit  $|\vec{u}|$  ab. Im Spezialfall eines thermischen Plasmas liegt für beide Teilchensorten eine Maxwell-Verteilung mit der Temperatur  $T_a = T_b = T$  vor. Dann lässt sich der Reaktionsparameter als

$$\langle \sigma u \rangle = \frac{m_a^{3/2} m_b^{3/2}}{(2\pi k_B T)^3} \int d^3 v_a \int d^3 v_b \sigma |v_a - v_b| e^{-\frac{m_a v_a^2}{2k_B T}} e^{-\frac{m_b v_b^2}{2k_B T}} \quad (1.5)$$

schreiben. Unter Verwendung der Schwerpunkts- und Relativgeschwindigkeit, lässt sich das Integral wie folgt umschreiben

$$\langle \sigma u \rangle = \frac{m_a^{3/2} m_b^{3/2}}{(2\pi k_B T)^3} (4\pi)^2 \int dV V^2 e^{-\frac{(m_a + m_b) V^2}{2k_B T}} \int du u^3 \sigma e^{-\frac{m_r u^2}{2k_B T}}. \quad (1.6)$$

Hierbei haben wir von der Kugelsymmetrie im Geschwindigkeitsraum Gebrauch gemacht (der Reaktionsparameter hängt nur vom Betrag von  $\vec{u}$  und  $\vec{V}$  ab). Die  $V$ -Integration kann direkt ausgeführt werden und ergibt  $\sqrt{\pi}/4 (2k_B T / (m_a + m_b))^{3/2}$ . Drücken wir nun noch die verbleibende Integration über  $u$  durch die Relativenergie  $E_r = (1/2) m_r u^2$  aus, so ergibt sich schließlich

$$\langle \sigma u \rangle = \frac{4}{\sqrt{2m_r \pi} (k_B T)^{3/2}} \int dE_r E_r \sigma(E_r) e^{-\frac{E_r}{k_B T}}. \quad (1.7)$$

Auf diese Weise kann bei vorgegebenem Wirkungsquerschnitt  $\sigma(E_r)$  die Temperaturabhängigkeit von  $\langle \sigma(u) u \rangle$  (und damit die des Reaktionsparameters  $R_{ab}$ ) bestimmt werden. Durch die hochenergetischen Anteile der Maxwell-Verteilungen ergeben sich signifikante Fusionsraten, selbst wenn die Temperatur des Plasmas unterhalb derjenigen liegt, die dem Maximum des Wirkungsquerschnitts entspricht. Ein zweites Phänomen, das die Wahrscheinlichkeit von Fusionsreaktionen deutlich erhöht, ist der 1928 von Gamow entdeckte Tunneleffekt.

**Tunneleffekt.** Eine quantenmechanische Rechnung liefert für die Tunnelwahrscheinlichkeit  $T$  durch eine Potentialbarriere  $U(r)$

$$T \approx e^{-G}, G = \frac{2}{\hbar} \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{2m [U(r) - E]} dr \quad (1.8)$$

wobei  $E > 0$  die (kinetische und potentielle) Energie des Teilchens ist und  $m$  seine Masse. Für eine Coulomb-Barriere  $U(r) = (Z_a Z_b e^2) / (4\pi \epsilon_0 r)$  lässt sich das Integral in geschlossener Form angeben:

$$G = 2\alpha Z_a Z_b c (2m/E)^{1/2} \gamma(x), \gamma(x) = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}. \quad (1.9)$$

Hierbei ist  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit,  $\alpha = e^2 / (4\pi\epsilon_0\hbar c) \approx 1/137$  ist die Feinstrukturkonstante und  $x = R_1/R_2 = E/U_C$  ( $U_C$  gibt die Höhe der Coulomb-Barriere an). Im Fall des Zweiteilchenstoßes sind die Ersetzungen  $m \rightarrow m_r$  und  $E \rightarrow E_r$  vorzunehmen, wobei sich für  $x \ll 1$  die Näherung  $\gamma(x) \approx \pi/2$  verwenden lässt. Wir erhalten somit

$$G = (E_G/E_r)^{1/2}, E_G = 2m_r c^2 (\pi\alpha Z_a Z_b)^2, \quad (1.10)$$

wobei  $E_G$  die Gamow-Energie genannt wird. Durch die endliche Tunnelwahrscheinlichkeit  $T = e^{-G}$  für  $E_r \ll U_C$  erhöhen sich die Fusionsraten also signifikant.

## 1.2 Fusionsprozesse in Sternen

**Falsche Erklärungen.** Schon im 18. Jahrhundert schätzten Geologen das Alter der Erde auf einige Milliarden Jahre. Aber wie kann die Sonne über so lange Zeiträume solch enorme Mengen an Energie freisetzen? Ein erster Vorschlag zur Beantwortung dieser Frage war, dass die Sonne überwiegend aus Steinkohle bestehe und allmählich verbrenne. Da die Masse der Sonne  $M_S = 2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  ist und der Heizwert von 1kg Steinkohle 28MJ beträgt, kann man die Lebensdauer der Sonne bei einer zeitlich konstanten Leuchtkraft (Strahlungsleistung) von  $L_S = 3,86 \cdot 10^{26} \text{ W}$  auf etwa 4600 Jahre schätzen. Es wurden also andere Erklärungen gesucht. Gegen Mitte des 19. Jahrhunderts machte Helmholtz den interessanten Vorschlag, die Sonne beziehe ihre Strahlungsenergie aus einer langsamen Kontraktion. Die in der Sonne gespeicherte Gravitationsenergie beträgt (unter Annahme einer konstanten Massendichte)  $E_g = (3/5)GM_S^2/R_S \approx 2.3 \cdot 10^{41} \text{ J}$ ! Hierbei ist  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  die Gravitationskonstante und  $R_S = 6.92 \cdot 10^8 \text{ m}$  der Sonnenradius. Diese gewaltige Energiemenge impliziert eine Lebensdauer der Sonne von 19 Millionen Jahren; dabei schrumpft der Durchmesser der Sonne pro Jahr um lediglich 120m. Verglichen mit dem geschätzten Alter der Erde ist diese Zeitspanne jedoch immer noch viel zu kurz. Die Hauptenergiequelle der Sonne muss demnach eine andere sein.

**Die richtige Erklärung.** Erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts kam man der richtigen Erklärung schließlich auf die Spur. Im Jahr 1923, also gut 10 Jahre nachdem er die Existenz von Atomkernen durch Streuexperimente bewiesen hatte, vermutete Rutherford, dass die Sonne zur Energiegewinnung vier Protonen zu einem  ${}^4_2\text{He}$ -Kern verschmelze. Unklar war dabei jedoch, wie der genaue Reaktionsmechanismus abläuft: ein Viererstoß ist aufgrund der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten aller vier Prozesse erheblich unwahrscheinlicher als Zweierstöße. Ein weiteres Problem war die offensichtlich zu niedrige Energie der Reaktionspartner: 1926 hatte Eddington die Temperatur im Sonneninneren mit ca. 4keV abgeschätzt (tatsächlich 1.5keV). Die Coulomb-Barriere zwischen zwei Protonen ist jedoch, wie oben ausgeführt, ca. 400keV hoch. Die Lösung dieses Problems kam 1928 durch Gamows Beschreibung des Tunneleffekts, bei dem nennenswerte Tunnelwahrscheinlichkeiten bereits bei Teilchenenergien deutlich unterhalb der Coulomb-Barriere auftreten. Der genaue Prozess der Kernverschmelzung in der Sonne wurde dann 1929 formuliert: dabei verschmelzen zunächst zwei Protonen zu einem Deuteron. Dieses kann mit einem weiteren Proton zu  ${}^3_2\text{He}$  fusionieren. Aus zwei  ${}^3_2\text{He}$ -Kernen entsteht

schließlich ein  ${}^4_2\text{He}$  Kern:



Somit läuft in der Sonne die Summenreaktion



ab (sog. *Protonenkette*). Die erste Teilreaktion, Gl. (??), ist mit großem Abstand die langsamste (da es sich um einen Prozess der schwachen Wechselwirkung handelt) und begrenzt somit die Gesamtreaktionsrate. Andernfalls wäre die Lebensdauer von vielen Sternen deutlich geringer. Bei höheren Temperaturen ( $T > 1\text{keV}$ ) kann der dritte Schritt auch über Alternativreaktionen ablaufen:



Somit ist als Endprodukt ebenfalls  ${}^4_2\text{He}$  entstanden, es wurden aber auch die Elemente Beryllium und Lithium gebildet. Eine weitere Alternative läuft nach der Bildung von  ${}^7_4\text{Be}$  über die Bildung von Bor ab:



Diese Reaktionen zeigen bereits, dass in Sternen weitere Elemente durch Kernverschmelzung gebildet werden können. Die Elementsynthese aus dem nach dem Urknall einzig vorhandenen Wasserstoff kann so z. T. erklärt werden. Dabei verbrennen die Sterne nach und nach immer schwerere Elemente bei immer höheren Temperaturen, bis sie schließlich erlöschen oder durch den ständigen Massenzuwachs instabil werden (Supernova).

Bei Temperaturen  $\geq 1\text{keV}$ , wenn auch Kohlenstoff gebildet werden kann, besteht die Möglichkeit, dass die Verschmelzung von vier Protonen zu  ${}^4_2\text{He}$  auch katalytisch in einem Kreisprozess ablaufen kann. Dieser sogenannte Bethe-Weizsäcker-Zyklus ist in Abbildung 1.3 dargestellt.

Dabei wirken Kohlenstoff, Stickstoff und Sauerstoff als Katalysator, d. h. sie werden weder an- noch abgereichert. Betrachtet man die in einem Zyklus verbrauchten und erzeugten Teilchen, so erkennt man, dass wiederum 4 Protonen zu  ${}^4_2\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e$  umgewandelt werden. Man hat so dieselbe Summenreaktion wie bei der Protonenkette. Die freigesetzte Fusionsenergie pro Volumen- und Zeiteinheit hängt sehr stark von der Temperatur ab:  $\varepsilon \propto T^{20}$  (pp-Kette:  $\varepsilon \propto T^4$ ). Der Bethe-Weizsäcker-Zyklus dominiert deshalb in größeren, etwas heißeren Sternen, d. h. für  $M > 1.5M_S$  bzw.  $T > 20\text{keV}$ . In der Sonne hingegen wird etwa 99% der Energie über die pp-Kette erzeugt. In der Sonne verbrennen über die unterschiedlichen Prozesse in einer Sekunde

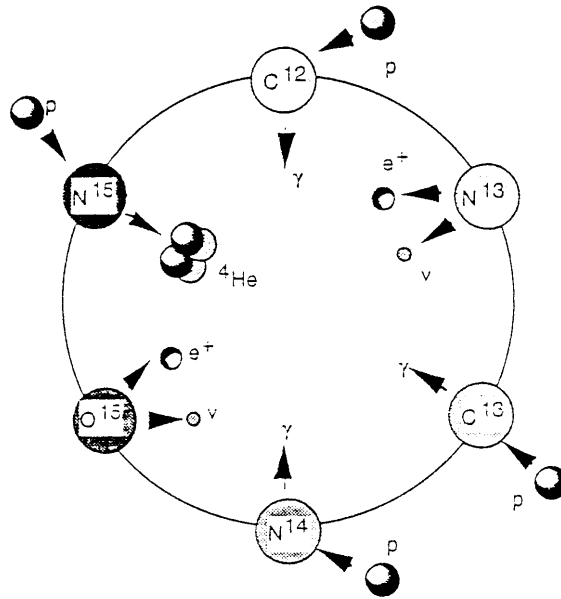


Abbildung 1.3: Verschmelzung von Protonen zu Helium im Bethe-Weizsäcker Zyklus.

600 Mio t Protonen zu 596 Mio t  ${}^4_2\text{He}$ . Die Massendifferenz entspricht nach  $\Delta E = \Delta mc^2$  einer Leistung von  $4 \times 10^{26} \text{ W}$ . Bestünde die gesamte Sonne nur aus Protonen, dann könnte diese Leuchtkraft für 100 Milliarden Jahre aufrecht erhalten werden. Dies liefert eine Obergrenze für die Lebensdauer der Sonne in ihrer jetzigen Form. Genauere Betrachtungen ergeben einen Wert, der um etwa eine Größenordnung darunter liegt.

### 1.3 Fusionsprozesse im Labor

Die in der Sonne ablaufende Protonenkette kann auf der Erde wegen ihrer vergleichsweise geringen Reaktionsrate nicht zur Energiegewinnung verwendet werden. Dies liegt vor allem am ersten Schritt, welcher die schwache Wechselwirkung beinhaltet. Der Wirkungsquerschnitt für eine solche Reaktion ist gegenüber dem für reine Kernreaktionen, bei denen nur die starke Wechselwirkung beteiligt ist, erheblich kleiner. Auf der Erde wird man daher vor allem Stoßreaktionen betrachten. Solche sind



wobei die ersten beiden ungefähr gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Abbildung 1.4 zeigt die Wirkungsquerschnitte für diese Reaktionen. Man erkennt, dass die  $D$ - $T$ -Reaktion bei der relativ niedrigen Relativenergie von 64keV ein Maximum des Wirkungsquerschnittes aufweist. Gleichzeitig liegt der Absolutwert des Maximums um fast eine Größenordnung über dem von  $D+{}^3_2\text{He}$ . Daher kommt der  $D$ - $T$ -Reaktion eine Sonderstellung unter den oben aufgeführten Prozessen zu. Heutige Konzepte für Fusionsreaktoren gehen im Allgemeinen



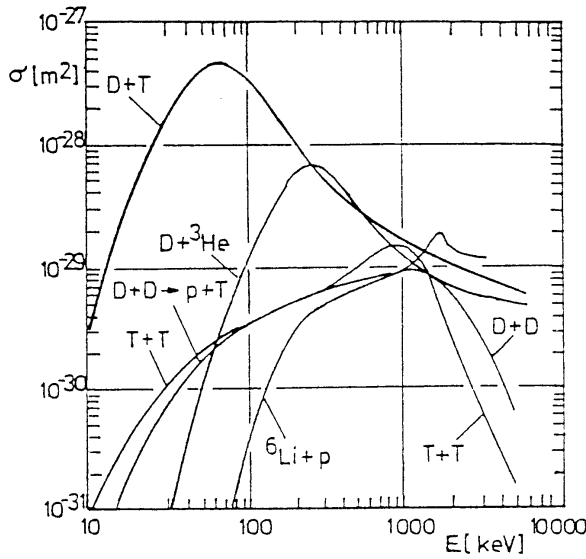
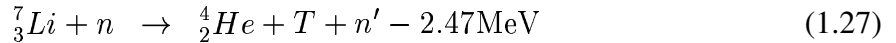


Abbildung 1.4: Wirkungsquerschnitte für verschiedene Fusionsreaktionen.

von der Verwendung dieser Reaktion aus. Dies birgt allerdings den Nachteil, dass Tritium auf der Erde nicht natürlich vorkommt; es ist radioaktiv und zerfällt mit einer Halbwertszeit von 12.35 Jahren gemäß



Allerdings kann Tritium in großem Maße aus dem reichlich vorhandenen Lithium erbrütet werden:



Das Maximum des Wirkungsquerschnittes für die *D-T*-Reaktion beruht auf der Existenz eines resonanten Mechanismus: im Termschema des (instabilen)  ${}^5_2\text{He}$  existiert ein angeregter Zustand 16.764MeV über dem Grundzustand. Dieser geht mit einer Wahrscheinlichkeit von  $7 \times 10^{-5}$  unter Aussendung eines  $\gamma$ -Quants in den Grundzustand über; ansonsten zerfällt er unter Energiegewinn von 0.89MeV in  ${}^4_2\text{He} + n$ . Die gesamte freiwerdende Energie beträgt also 17.6MeV. Die Summe der Massenäquivalente von *D* und *T* liegt um 16.7MeV über dem Grundzustand des  ${}^5_2\text{He}$ . Somit bildet sich bei einer Relativenergie von 64keV aus *D* und *T* der angeregte  ${}^5_2\text{He}$  Kern, der sofort in  ${}^4_2\text{He} + n$  zerfällt. Dieser resonante Mechanismus ist für das Maximum des Wirkungsquerschnittes bei 64keV verantwortlich. Die folgende Abbildung 1.5 verdeutlicht die energetischen Verhältnisse.

Der gegenüber dem Energiegewinn von ca. 20MeV relativ bescheidene Energieaufwand von ca. 100keV zur Beschleunigung von *D* und *T* läßt zunächst den Schluss zu, dass es möglich sein sollte, mit gekreuzten *D-T* Teilchenstrahlen bzw. mit einem Teilchenstrahl auf ein ruhendes Target Energie zu gewinnen. Es gibt jedoch zum Fusionsstoß einen konkurrierenden Prozess, nämlich den Coulomb-Stoß (bei den hohen Energien insbesondere mit den Elektronen). Dieser ist durch den Rutherford-Querschnitt gegeben. Es zeigt sich, dass  $\sigma_{Coulomb}$  bei vergleichbaren Relativenergien immer noch um einen Faktor  $\geq 50$  größer als  $\sigma_{Fus}$  ist. Somit sind pro Fusionsreaktion  $\geq 5\text{MeV}$  aufzubringen. Berücksichtigt man nun die elektrischen Wirkungsgrade

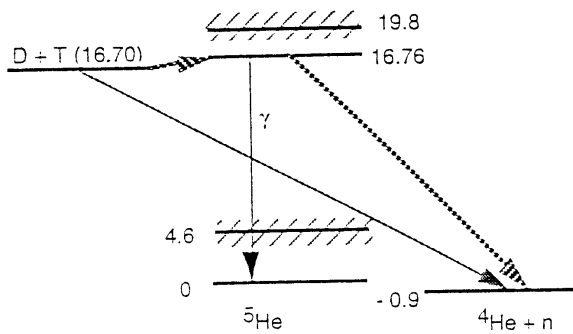


Abbildung 1.5: Termschema des instabilen  ${}^5_2\text{He}$ . Das Massenäquivalent von  $D$  und  $T$  ist relativ zum Grundzustand des  ${}^5_2\text{He}$  eingezeichnet.

für den Teilchenbeschleuniger ( $\eta \leq 0.5$ ) und für die Umwandlung thermischer in elektrische Energie ( $\eta \approx 0.3$ ), so kommt man zu dem Schluss, dass mit Teilchenstrahlen ein Fusionsreaktor nicht zu realisieren ist.

Ein Ausweg ist, die Teilchen oftmals miteinander stoßen zu lassen. Dies wird möglich, wenn man die Teilchenenergie thermisch zur Verfügung stellt und das so entstehende Wasserstoffplasma einschließt. In diesem Fall ist die Reaktionsrate nach Gl. (??) zu berechnen. Die folgende Abbildung zeigt den Reaktionsparameter für die Fusionsreaktionen aus Abb. ?? für ein thermisches Plasma.

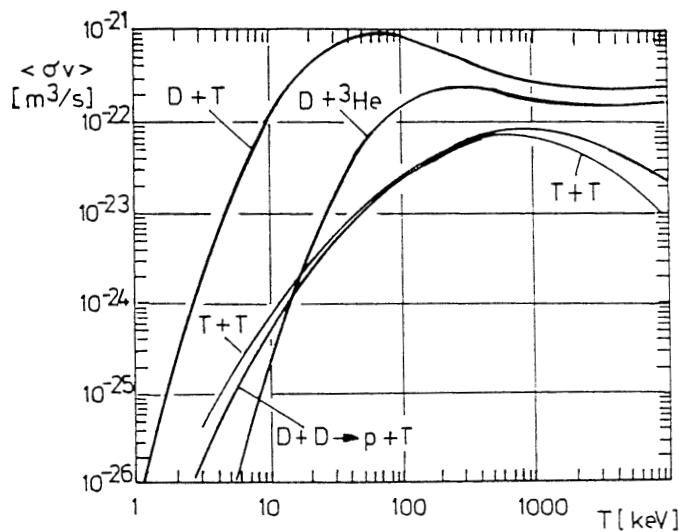


Abbildung 1.6: Reaktionsparameter  $\langle \sigma v \rangle$  für verschiedene Fusionsreaktionen im thermischen Plasma der Temperatur  $T$ .

Im Vergleich mit Abb. 1.4 erkennt man den Einfluss der Maxwell-Verteilung. Während dort der Wirkungsquerschnitt für die  $D$ - $T$ -Reaktion bei 10keV Relativenergie gegenüber dem Maximum bei 64keV ungefähr um einen Faktor 200 reduziert ist, beträgt der Unterschied im Reaktionsparameter hier nur ca. einen Faktor 5. Damit kann kontrollierte Kernfusion in einem eingeschlossenem thermischem Plasma von  $T \geq 10\text{keV}$  durchgeführt werden.

Um die erforderlichen Bedingungen zur Energieerzeugung aus Kernfusion abzuleiten, wollen wir zunächst die freiwerdende Fusionsleistung und ihre Verteilung auf die jeweils zwei Fusionsprodukte diskutieren.

Die höchste Fusionsleistung ergibt sich bei einer 50:50-Mischung aus  $D$ - $T$  zu:

$$P_{fus,DT} = \frac{n_{DT}}{4} \cdot \langle \sigma v \rangle_{DT} \cdot Q_{DT} \quad (1.29)$$

mit  $n_{DT} = n_D + n_T$ .

Die Verteilung der Energie auf das entstehende Heliumatom bzw. das Neutron folgt unmittelbar aus der gleichzeitigen Erfüllung von Energie- und Impulssatz. Dazu kann vorausgesetzt werden, dass die Teilchengeschwindigkeiten nach der Fusion erheblich über den Ausgangsgeschwindigkeiten vorher liegen, sodass:

$$m_{He} \cdot v_{He} \approx -m_n \cdot v_n \quad (\text{Impulssatz})$$

andererseits gilt:

$$\frac{m_{He}}{2} v_{He}^2 + \frac{m_n}{2} v_n^2 \approx Q_{DT} = 17,5 \text{ MeV} \quad (\text{Energiesatz})$$

Ineinander eingesetzt folgt:

$$\frac{E_{He}}{E_n} = \frac{m_n}{m_{He}} = 1 : 4, \quad (1.30)$$

d. h. die Energie verteilt sich im umgekehrten Massenverhältnis auf die Reaktionsprodukte.

Von dieser Gesamtleistung steht jeweils nur der in die  $\alpha$ -Teilchen gehende Anteil für die Plasmaheizung zur Verfügung, denn die Neutronen verlassen das Plasma ungebremst (d. h. bei  $D$ - $T$  nur 20%, bei  $p^{11}B$  und  $D^3He$  aber 100% der Energie für Plasmaheizung). Mit dieser Leistung müssen alle Energieverluste aus dem Plasma abgedeckt werden (voll gezündetes Fusionsplasma):

$$P_{fus,geladen} = P_{Verlust}. \quad (1.31)$$

Die Zündbedingung kann wie folgt formuliert werden (Beispiel  $D$ - $T$ -Fusion):

$$\frac{n_{DT}^2}{4} \cdot \langle \sigma v \rangle_{DT} \cdot Q_{DT} \cdot 0,2 \cdot Vol = P_{Verlust}, \quad (1.32)$$

wobei  $P_{Verlust}$  dargestellt werden kann als:

$$P_{Verlust} \equiv \frac{3/2 \cdot (n_e + n_{DT}) \cdot kT}{\tau_E} \cdot Vol. \quad (1.33)$$

$\tau_E$  ist die sogenannte Energieeinschlusszeit, d. h. die charakteristische Abkühlzeit des Systems. Dabei ist (idealisiert) angenommen, dass das Plasma nur aus Elektronen und  $D$ - $T$ -Ionen zusammengesetzt ist.

Wegen der Quasineutralitätsbedingung gilt:  $n_e = n_{DT}$ . Für den hier interessierenden Temperaturbereich kann  $\langle \sigma v \rangle \propto T^2$  gesetzt werden ( $P_{fus} \propto n^2 T^2 \approx \text{const}$ , vgl. Abbildung 1.6).

Damit folgt als Zündbedingung:

$$n_e \cdot T \cdot \tau_E = \text{const.} \quad (1.34)$$

Mit der Annahme  $\langle \sigma T \rangle \propto T^2$  haben wir uns bereits auf Temperaturen  $\geq 10 \text{ keV}$  festgelegt. Mit der Zündbedingung ist nun auch  $n\tau_E$  vorgegeben, allerdings ist der Druck  $p = nT$  noch frei wählbar.

Für Untersuchungen zur Energiegewinnung durch Kernfusion verfolgt man im Wesentlichen zwei unterschiedliche Wege: Bei der **Trägheitsfusion** wird ein sehr dichtes Plasma ( $n_e \sim 10^{31} \text{ m}^{-3}$ ) durch Beschuss mit Lasern oder Schwerionenstrahlen schnell aufgeheizt. Wegen der endlichen Trägheit kann das heiße Plasma sich nur mit der Ionenschallgeschwindigkeit ausdehnen, die Energieeinschlusszeit beträgt damit etwa  $10^{-10} \text{ s}$ . Der Druck des so erzeugten Plasmas ist etwa vergleichbar mit dem Sonneninneren. Bei der **magnetischen Fusion** wird das Plasma stationär mit Hilfe eines Magnetfeldes zusammengehalten. Der Plasmadruck ist dabei relativ klein ( $n_e \sim 10^{21} \text{ m}^{-3}$ ), die Energieeinschlusszeit ist durch die Energieverluste durch Strahlung und turbulenten Energie- und Teilchentransport begrenzt (für einen Reaktor basierend auf magnetisch eingeschlossenem Plasma plant man  $\tau_E = 5 \text{ s}$ ). Diese beiden Konzepte werden in den folgenden Kapiteln ausführlicher diskutiert.

## 1.4 Myon-katalysierte Fusion

Im Gegensatz zum im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Zugang zur Fusion im thermischen Plasma bei  $T \geq 10 \text{ keV}$  bestehen auch Bemühungen, Fusionsreaktionen nahezu bei Zimmertemperatur einzuleiten (sog. "kalte Fusion"). Dazu muss die Coulomb-Barriere erniedrigt werden. Eine Hypothese besteht darin, Wasserstoff im Festkörper einzulagern damit sich die Wasserstoffkerne so nahe kommen, dass Fusion möglich wird. Dieser Weg hat bis jetzt noch zu keinem Erfolg geführt; die 1989 vieldiskutierten Ergebnisse, bei denen durch Elektrolyse in Palladium eingelagerter Wasserstoff zu hohen Fusionsraten geführt haben sollte, stellten sich als Fehlinterpretation heraus.

Ein Weg zur Verminderung der Coulomb-Barriere besteht in der Bildung myonischer Wasserstoffmoleküle. Wie bereits vom  $H_2^+$  Molekül bekannt, kann ein Elektron zwischen den Wasserstoffkernen zur Abschirmung der Coulomb-Kräfte führen und somit ein gebundenes System ermöglichen, bei dem der Kernabstand (Bindungslänge) von der Größenordnung des Atomradius ist. Beim normalen Wasserstoffatom beträgt dieser  $a_0 = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ . Eine signifikante Fusionswahrscheinlichkeit tritt damit nicht auf. Ersetzt man jedoch das Elektron durch ein schwereres negativ geladenes Teilchen, so verkleinert sich die Bindungslänge umgekehrt proportional zum Massenverhältnis. So gilt für ein myonisches Wasserstoffatom

$$a = a_0 m_e / m_\mu = 5.3 \times 10^{-11} / 207 \approx 2.5 \times 10^{-13} \text{ m}. \quad (1.35)$$

Damit ist die Tunnelwahrscheinlichkeit drastisch erhöht. Es liegt also nahe, einem  $T_2D_2$  Gasgemisch negative Myonen zuzusetzen, um Fusionsprozesse auszulösen. Das Myon wirkt dabei katalytisch, d. h. es wird nicht verbraucht. Allerdings muss das Myon in einem Beschleuniger unter erheblichem Energieaufwand (zur Zeit ca.  $3 \text{ GeV}$ ) erzeugt werden, z. B. durch Beschuss eines Targets mit hochenergetischen Protonen. Das entstandene  $\mu^-$  zerfällt innerhalb von  $2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$  gemäß

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu. \tag{1.36}$$

Man muss also dafür sorgen, dass ein Myon innerhalb seiner Lebensdauer genügend Fusionsprozesse einleitet, um eine positive Energiebilanz zu gewährleisten. Im Einzelnen laufen dabei die folgenden Prozesse ab: leitet man negative Myonen in ein  $D_2T_2$  Gasgemisch, so werden diese zunächst durch Stöße mit den Molekülen abgebremst und bilden dabei myonische Deuterium- bzw. Tritiumatome. Wegen der höheren Bindungsenergie ( $E \propto 1 / (1 + m_\mu / m_{Kern})$ ) bilden sich bevorzugt myonische Tritiumatome. Diese dringen wegen ihrer Kleinheit leicht in die Deuteriumatome ein und bilden so einen Molekülkomplex, bei dem einer der Deuteriumkerne des ursprünglichen  $D_2$  Moleküls durch ein  $(D\mu T)^+$ -Molekül ersetzt wurde, also insgesamt  $((D\mu T)^+ D)_{ee}$ . Die Bildung des Komplexes verläuft im Detail über einen resonanten Mechanismus und besitzt ein Maximum in der Reaktionsrate bei  $T \approx 900^\circ C$ . Im so entstandenen  $D\mu T$ -Molekül ist die Tunnelwahrscheinlichkeit so stark erhöht, dass innerhalb von  $10^{-12}s$  die Fusion der beiden Kerne geschieht. Damit ist die Zeitskala des gesamten Zyklus durch das oben besprochene Abbremsen der Myonen im Gasgemisch bestimmt und liegt bei  $\approx 10^{-9}s$ . Jedes Myon könnte also innerhalb seiner Lebensdauer mehr als 2000 Fusionsreaktionen katalysieren; Energiegewinn durch myon-katalysierte Fusion wäre damit möglich. Abb. 1.7 verdeutlicht den bei der myon-katalysierten Fusion durchlaufenen Zyklus. Experimente, die vor allem am LAMPF in Los Alamos und am Paul-Scherrer Institut in Villigen (Schweiz) durchgeführt werden, zeigen jedoch, dass der Fusionsprozess selbst durch zwei konkurrierende Prozesse zu beschreiben ist

$$D\mu T \rightarrow {}^4_2He + n + \mu + 17.6MeV (99.4\%) \tag{1.37}$$

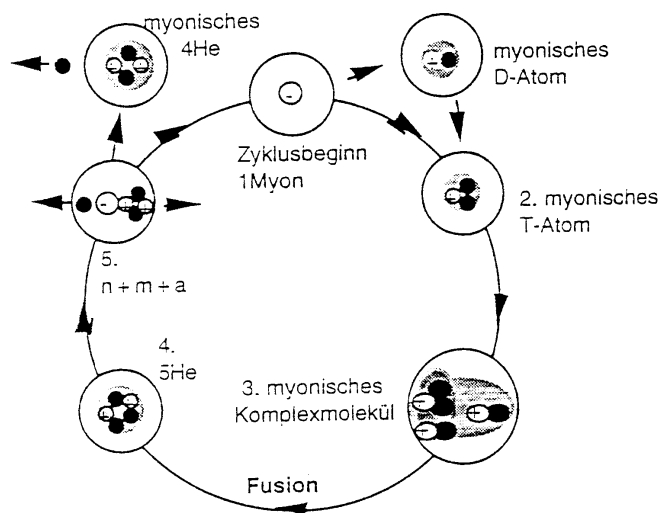


Abbildung 1.7: Reaktionszyklus der myonen-katalysierten Fusion.

$$D\mu T \rightarrow {}^4_2He\mu + n + 17.6MeV (0.6\%). \tag{1.38}$$

Bei der zweiten Reaktion bleibt das Myon am Helium kleben ('sticking') und kann keine weiteren Fusionsreaktionen mehr katalysieren. Obwohl dies nur mit 0.6 % Wahrscheinlichkeit

geschieht, führt es doch zu einer drastischen Verringerung der Effizienz der Myon-Katalyse: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Myon nach  $N$  Reaktionen noch zur Verfügung steht, ist  $(1 - 0.006)^N \approx 1 - 0.006N$ . Damit kann ein Myon nur ca.  $1/0.006 \approx 170$  Fusionsreaktionen katalysieren. Dies bestätigt sich in den Experimenten, in denen  $N \approx 100$  beobachtet wird. Der Energiegewinn kommt damit beim momentanen Stand der Forschung nicht über die zur Herstellung des Myons aufgewendete Energie hinaus; eine effektive Energiegewinnung durch myon-katalysierte Fusion ist damit im Moment nicht möglich.

# Kapitel 2

## Fusion durch Trägheitseinschluss

Wir haben bereits gesehen, dass man zur Energiegewinnung aus Fusionsprozessen auf der Erde ein Plasma bei Temperaturen  $T \geq 10\text{keV}$  einschließen muss. Bei der Fusion durch Trägheitseinschluss wird dies nur durch die Massenträgheit des Plasmas bewirkt. Fusionsprozesse müssen also innerhalb der Zeit, in der das Plasma auseinanderläuft, geschehen. Diese Zeit ist durch die Schallgeschwindigkeit bestimmt. Sie liegt im Plasma von  $10\text{keV}$  bei ca.  $10^5 - 10^6\text{m/s}$ . Daher versucht man bei der Trägheitsfusion, ein Kügelchen ('Pellet') des Brennstoffs (z. B. D-T-Gemisch) in sehr kurzer Zeit ( $\ll 10^{-6}\text{s}$ ) auf die notwendige Temperatur aufzuheizen. Dies entspricht der Realisierung einer miniaturisierten Wasserstoffbombe. Der Treiber hierzu muss also einen schnellen und hochenergetischen Puls aufbringen. Es bieten sich Laser- oder Schwerionenstrahlen an. Wir wollen nun die Dimensionierung des Pellets sowie die mögliche Realisierung des Trägheitsfusionsreaktors untersuchen.

### 2.1 Fusionskriterium und Energiebilanz

Zunächst schätzen wir die erforderliche Größe des Pellets ab. Die vom Reaktor erzeugte Leistung ist durch die pro Pellet freiwerdende Energie und die Repetitionsfrequenz der Pelletverbrennung gegeben. Wie wir später sehen werden, gehen Reaktorstudien von einer Repetitionsfrequenz von  $\geq 1\text{Hz}$  aus. Damit ergibt sich für eine thermische Leistung von  $1\text{GW}$  eine Energiemenge von  $\leq 1\text{GJ}$  pro Pellet. Dies ist bereits ein beachtlicher Wert, die Explosion eines Pellets unter Freisetzung von  $1\text{GJ}$  entspricht der Sprengkraft von  $250\text{kg TNT}$ . Daher kann auch die Repetitionsfrequenz kaum signifikant niedriger gewählt werden, da dann die Energie pro Pellet zu groß wäre. Da jedes Paar von  $D$  und  $T$  zur Produktion von  $17\text{MeV} \approx 3 \times 10^{-12}\text{J}$  führt, braucht man zur Erzeugung von  $1\text{GJ}$  ca.  $6 \times 10^{20}$  Teilchen. Dies entspricht einer Masse von ca.  $2.4\text{mg}$ . Die Dichte von flüssigem D-T beträgt  $200\text{kg/m}^3$ , sodass ein kugelförmiges Pellet einen Radius von  $R \approx 1.3\text{mm}$  haben sollte. Mit der obigen Abschätzung für die Schallgeschwindigkeit erhalten wir so, dass bei der Trägheitsfusion ein Kügelchen von  $1\text{mm}$  Radius innerhalb von  $10^{-9}\text{s}$  verbrannt werden muss.

Das Zündkriterium für das Pellet kann noch genauer untersucht werden. Dabei muss die Einschlusszeit  $\tau_E$ , während der das Pellet auseinanderläuft, größer als die Brenndauer  $\tau_B$ , in der ein signifikanter Teil des D-T-Gemisches fusioniert, sein. Die Einschlusszeit schätzen wir unter Verwendung der Formel für die Ionenschallgeschwindigkeit ab:

$$\tau_E \approx \frac{R}{c} = R \sqrt{\frac{m_i}{k_B (T_e + 3T_i)}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{m_i}{k_B T}}, \quad (2.1)$$

wobei wir im letzten Schritt  $T_e = T_i = T$  angenommen haben. Die Brenndauer ergibt sich aus der Reaktionsrate  $R_{ab}$ , d. h. der Zahl der Fusionsreaktionen pro Zeit- und Volumeneinheit. Nach Gl. (1.4) ist diese in einem D-T-Gemisch mit  $n_D = n_T = n/2$  durch  $R_{ab} = n^2 \langle \sigma u \rangle / 4$  gegeben. Pro Zeiteinheit ergeben sich so  $R_{ab}V$  Fusionsreaktionen, erzeugt von  $nV/2$  Teilchen im Volumen  $V$ . Definieren wir nun die Brenndauer als die Zeit, nach der die Hälfte aller Teilchen verbrannt ist, so erhalten wir

$$\tau_B = \frac{1}{4} \frac{n}{R_{ab}} = \frac{1}{n \langle \sigma u \rangle}. \quad (2.2)$$

Die Bedingung für eine effiziente Verbrennung,  $\tau_E \geq \tau_B$  führt schließlich auf das Kriterium

$$\frac{1}{n \langle \sigma u \rangle} \leq \frac{R}{2} \sqrt{\frac{m_i}{k_B T}} \rightarrow \frac{2\sqrt{k_B T}}{\langle \sigma u \rangle} \leq R n \sqrt{m_i}. \quad (2.3)$$

Dabei ist in der letzten Ungleichung die rechte Seite eine Funktion der Temperatur, während die linke Seite von der Dichte abhängt. Da die Temperatur durch den Wirkungsquerschnitt, bzw. den Reaktionsparameter relativ fest vorgegeben ist, kann man die Ungleichung also an eine Anforderung an das Produkt von Massendichte  $\rho$  und Radius formulieren:

$$\rho R \geq \frac{2\sqrt{m_i k_B T}}{\langle \sigma u \rangle}. \quad (2.4)$$

Für ein D-T-Gemisch ( $m = 2.5m_p$ ) bei  $T = 10 \text{ keV}$  ergibt sich die Bedingung

$$\rho R \geq 30 \text{ kg/m}^2. \quad (2.5)$$

Diese einfache Abschätzung wird durch genauere Rechnungen bestätigt. So ergibt sich für das Abbrandkriterium  $\Phi$ , welches den Anteil des im Pellet verbrannten Brennstoffs angibt

$$\Phi = \frac{\rho R}{H_0 + \rho R} \quad (2.6)$$

mit  $H_0 = 70 \text{ kg/m}^2$ . Für  $\Phi = 0.3$  ergibt sich wiederum unser Kriterium (2.5).

Wir fragen nun, ob das Fusionskriterium mit der oben abgeschätzten Größenordnung kompatibel ist. Für flüssiges D-T ist  $\rho = 200 \text{ kg/m}^3$ . Für einen Pelletradius von 1mm erhalten wir somit  $\rho R = 0.2 \text{ kg/m}^2$ , d. h. einen um einen Faktor 150 zu kleinen Wert. Wir müssen also die Zielparame-ter verändern. Dies kann prinzipiell auf 2 Arten geschehen:

- Vergrößerung von  $R$  unter Beibehaltung von  $\rho$ : Dann muss  $R$  um einen Faktor 150, d. h. auf 15 cm vergrößert werden. Damit erhöht sich die pro Pellet freigesetzte Energie auf  $(150)^3 \text{ GJ} \approx 3.4 \times 10^{15} \text{ J}$ . Dies entspricht einer Sprengkraft von  $850 \text{ kT TNT}$  (die in beiden Weltkriegen zusammen freigesetzte Sprengkraft wird auf ca.  $10 \text{ MT TNT}$  geschätzt). Diese Lösung ist also nicht praktikabel.
- Beibehaltung der Masse von  $1 \text{ mg}$ : Dann muss das Pellet komprimiert werden. Dabei wächst die Massendichte  $\rho \propto R^{-3}$ , d. h.  $\rho R \propto R^{-2}$ . Wir müssen also den Radius des Pellets unter Beibehaltung der Masse um einen Faktor  $\geq 10$  verkleinern. Die Massendichte steigt dabei auf das 1500-fache des ursprünglichen Wertes.



Das Ziel der Trägheitsfusion ist also die Kompression eines  $1mg$  schweren Pellets von Radius  $R = 1mm$  auf  $R = 100\mu m$  in der Zeit von  $\approx 10^{-10}s$ . Dabei steigt die Massendichte auf mehr als 1000-fache Festkörperdichte und die Temperatur erreicht ca.  $10keV$ . Die Druckerhöhung ist dabei enorm, der Druck steigt bis auf  $\approx 3 \times 10^{15} Pa$ , d. h. auf ca.  $3 \times 10^{10}$ -fachen Atmosphärendruck. Dieser Wert ist den Verhältnissen im Sonneninneren vergleichbar. Bei der Berechnung des Druckes hat man zu beachten, dass zumindest das Elektronengas bei der auftretenden Dichte von  $n \approx 7.5 \times 10^{31} m^{-3}$  und  $T = 10keV$  bereits als quantenmechanisch entartetes Fermigas zu behandeln ist. In diesem berechnet sich der Druck mit Hilfe der Fermi-Energie:

$$p = n_E \frac{2}{5} E_F = \frac{\hbar^2}{5m_e} (3\pi^2)^{2/3} n_e^{5/3}. \quad (2.7)$$

Er wächst somit stärker als linear mit der Dichte an, ist aber andererseits, im Gegensatz zum idealen Gasgesetz, unabhängig von der Temperatur. Dies ist besonders günstig für die Kompression, da dann die aufgewendete Energie vollständig in Kompressionsenergie umgesetzt werden kann und nicht zur Entropievermehrung führt. Die Kompression des Pellets erfolgt hauptsächlich durch den Druck des von der Oberfläche abdampfenden Materials (actio=reactio). Um die gewünschte Kompression von  $\geq 1500$  zu erhalten, muss jedoch die Pulsform des als Treiber verwendeten Laser- oder Schwerionenstrahls optimiert werden: bei Bestrahlung mit einem extrem kurzen Puls ( $\delta$ -Funktion) läuft eine Stosswelle zum Pelletzentrum. Diese führt maximal zu einer Dichteerhöhung um einen Faktor  $(\gamma + 1) / (\gamma - 1)$ , d. h. 4 für den Adiabatenkoeffizienten  $\gamma = 5/3$ . Beaufschlagt man das Pellet nun mit einem neuen  $\delta$ -Puls, so kann das vorkomprimierte Material weiter verdichtet werden. Darauf sollte ein weiterer Puls folgen, etc. Man kann nun die Summe von  $\delta$ -Funktionen zu einer kontinuierlichen Pulsform zusammenfassen; diese ist auf der Zeitskala der Propagation der Stoßfront (also einige  $10^{-10}s$ ) kontinuierlich ansteigend. Mit einer solchermaßen optimierten Pulsform kann man Verdichtungen bis etwa  $10^4$  erreichen. Bei der Bestrahlung z. B. mit einem Laser muss jedoch die Kugelsymmetrie möglichst exakt eingehalten werden. Kleine Asymmetrien in der Leistungsdeposition bewirken Inhomogenitäten in der Stoßfront, welche zu Instabilitäten bei der Kompression führen. Diese haben ihre Ursache in der geringeren Massendichte des abdampfenden Materials im Vergleich zur komprimierten Materie. Die Situation ist somit analog der Schichtung zweier Flüssigkeiten, bei der die schwerere Flüssigkeit über der leichteren liegt: das Gleichgewicht ist instabil, bei kleiner Auslenkung der Grenzfläche bildet sich die sogenannte *Rayleigh-Taylor-Instabilität* aus, welche zur Umschichtung der Flüssigkeiten in den stabilen Zustand führt. Dies ist in Abb. 2.1 skizziert.

Wir betrachten also folgende idealisierte Situation: Zwei jeweils homogene und inkompressible Flüssigkeiten unterschiedlicher Massendichte seien übereinander geschichtet und der Gravitationsbeschleunigung  $\vec{g} = -g\vec{z}$  ausgesetzt (wir benutzen ein kartesisches Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren  $\vec{v}$ ,  $\vec{y}$  und  $\vec{z}$ ). Ihre Grenzfläche liege bei  $z = 0$ . Das Strömungsverhalten dieses Systems kann durch folgende hydrodynamische Gleichungen beschrieben werden:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.8)$$

$$\rho (\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = -\nabla p - \rho g \vec{z}, \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.10)$$

Hierbei ist  $\rho$  die Massendichte,  $v$  die Strömungsgeschwindigkeit und  $p$  der (isotrope) Druck der Flüssigkeit. Diese Gleichungen sind sehr ähnlich den im vergangenen Semester abgeleiteten MHD-Gleichungen. Die erste Gleichung entspricht der Kontinuitätsgleichung, die zweite

der Kraftgleichung, die dritte Gleichung entspricht der Annahme inkompressibler Flüssigkeiten. Analog zum Vorgehen in der MHD linearisieren wir die Gleichungen ( $X = X_0 + X_1$ ,  $X_1 \ll X_0$  mit  $X = \rho, v, p$ ).

Unter der Annahme von  $v_0 = 0$  folgt in niedrigster Ordnung

$$\partial_t \rho_0 = 0, \quad -\nabla p_0 - \rho_0 g \vec{z} = 0 \quad (2.11)$$

und in erster Ordnung

$$\partial_t \rho_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla \rho_0 = 0, \quad \rho_0 \partial_t \vec{v}_1 = -\nabla p_1 - \rho_1 g \vec{z}, \quad \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0. \quad (2.12)$$

Wegen  $\partial_x \rho_0 = 0$ ,  $\partial_y \rho_0 = 0$  und  $\partial_z \rho_0 \neq 0$  (nur für  $z = 0$ ) kann man Gl. (??) auch schreiben als

$$\partial_t \rho_1 + \nu_{1z} \partial_z \rho_0 = 0, \quad (2.13)$$

$$\rho_0 \partial_t \nu_{1x} + \partial_x p_1 = 0, \quad (2.14)$$

$$\rho_0 \partial_t \nu_{1y} + \partial_y p_1 = 0, \quad (2.15)$$

$$\rho_0 \partial_t \nu_{1z} + \partial_z p_1 + \rho_1 g = 0, \quad (2.16)$$

$$\partial_x \nu_{1x} + \partial_y \nu_{1y} + \partial_z \nu_{1z} = 0. \quad (2.17)$$

Dies sind fünf Gleichungen für fünf Unbekannte:  $\rho_1, \nu_{1x}, \nu_{1y}, \nu_{1z}$  und  $p_1$ . Macht man für alle gestörten Größen den Ansatz  $X_1(x, y, z, t) = \hat{X}_1(z) \exp(ik_x x + ik_y y + \gamma t)$ , dann folgt aus den Gleichungen (??), (??) und (??) die Beziehung

$$\hat{p}_1 = - \left( \frac{\gamma \rho_0}{k^2} \right) \frac{d\hat{\nu}_{1z}}{dz} \quad (2.18)$$

mit  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ . Die Gleichungen (??), (??) und (??) liefern schließlich

$$\frac{d}{dz} \left( \rho_0 \frac{d\hat{\nu}_{1z}}{dz} \right) = \left[ 1 - \frac{g}{\gamma^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \right] \rho_0 k^2 \hat{\nu}_{1z}. \quad (2.19)$$

Als Randbedingungen wählen wir  $\hat{\nu}_{1z} = 0$  und  $d_z \hat{\nu}_{1z} = 0$  für  $|z| \rightarrow \infty$ . Gleichung (??) kann als Eigenwertgleichung aufgefasst werden; dabei ist  $\hat{\nu}_{1z}$  die Eigenfunktion und [...] der zugehörige Eigenwert. Ist  $\rho_0(z)$  (zusammen mit  $k$  und  $g$ ) vorgegeben, dann liefert Gleichung (??) die Anwachsrate  $\gamma$  der Störungen sowie deren Struktur in  $z$ -Richtung. Für  $z \neq 0$  ist  $d_z \rho_0 = 0$ ; demnach gilt außerhalb der Grenzfläche:

$$\frac{d^2 \hat{\nu}_{1z}}{dz^2} = k^2 \hat{\nu}_{1z}. \quad (2.20)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet  $\hat{\nu}_{1z}(z) = \chi_+ \exp(kz) + \chi_- \exp(-kz)$ . Um die Randbedingungen zu erfüllen und einen stetigen Übergang bei  $z = 0$  zu gewährleisten, muss

$$\hat{\nu}_{1z}(z) \propto [\theta(-z) \exp(kz) + \theta(z) \exp(-kz)] \quad (2.21)$$

mit der Heavisideschen Stufenfunktion<sup>1</sup>  $\theta(z)$  gelten. Benutzt man dieses Ergebnis und integriert Gleichung (??) über ein infinitesimal kleines Intervall  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , dann erhält man mit  $d_z \rho_0(z) = [\rho_0^+ - \rho_0^-] \delta(z)$  die Gleichung

$$-k [\rho_0^+ + \rho_0^-] \hat{v}_{1z}(0) = -\frac{gk^2}{\gamma^2} [\rho_0^+ - \rho_0^-] \hat{v}_{1z}(0) \quad (2.22)$$

mit  $\rho_0^\pm = \rho_0(\pm\varepsilon)$ , aus welcher

$$\gamma^2 = Akg, A \equiv \frac{\rho_0^+ - \rho_0^-}{\rho_0^+ + \rho_0^-} \quad (2.23)$$

folgt. Der dimensionslose Parameter  $A$  wird Atwood-Zahl genannt. Für  $\rho_0^+ < \rho_0^-$  ist  $A$  negativ und  $\gamma$  rein imaginär, d. h. das System führt Schwingungen um seine Gleichgewichtslage aus. Im umgekehrten Fall ist  $A$  positiv und  $\gamma$  reell, d. h. kleine Störungen wachsen exponentiell in der Zeit an; das System ist instabil. Sobald die Amplituden der Störungen hinreichend groß sind, setzen nichtlineare Effekte ein und führen zu einer Durchmischung der beiden Flüssigkeiten.

**Konsequenzen für die Trägheitsfusion.** Obige Betrachtungen gehen auf Lord Rayleigh (1883) zurück. G. Taylor erkannte im Jahr 1950, dass sie sich direkt auf eine andere Situation übertragen lassen, die im Zusammenhang mit dem Trägheitseinschluss von Hochtemperaturplasmen von großer Bedeutung ist.

Aus der Gleichgewichtsbedingung  $\rho$

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g \quad (2.24)$$

folgt eine Beziehung zwischen dem Druckgradienten an der Grenzfläche und der Gravitationsbeschleunigung:

$$d_z p_0|_{z=0} \equiv \frac{p_0(\varepsilon) - p_0(-\varepsilon)}{2\varepsilon} = -\frac{(\rho_0^+ + \rho_0^-)g}{2}. \quad (2.25)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem Dichtegradienten, findet man:

$$\frac{1}{4\varepsilon^2} (p_0(\varepsilon) - p_0(-\varepsilon)) (\rho_0^+ - \rho_0^-) = -\frac{g}{2} (\rho_0^{+2} - \rho_0^{-2}). \quad (2.26)$$

Diese Beziehung ist offenbar nicht zu erfüllen, wenn  $\nabla \rho_0 \cdot \nabla p_0 < 0$  ist.

Taylor wies nach, dass diese Instabilitätsbedingung auch in Abwesenheit einer Gravitationskraft ihre Gültigkeit behält. Wird nun ein Pellet mit einem Laser- oder Schwerionenstrahl beschossen, dann bildet sich an seiner äußeren Randschicht ein Plasma, dessen Druck größer ist als der im Pelletmaterial. Da andererseits die Massendichte in der Ablationsschicht etwas kleiner ist, ist die Taylor-Bedingung  $\nabla \rho_0 \cdot \nabla p_0 < 0$  erfüllt. Die Kompression des Pellets ist also ein instabiler Prozess. Relativ detaillierte Simulationsrechnungen [Takabe *et al.* 1985] liefern für

<sup>1</sup>Es gilt:  $\theta(z) = 1$  für  $z > 0$ ,  $\theta(z) = 0$  für  $z < 0$  und  $\theta(0) = 1/2$ .

die Anwachsrate von Instabilitäten bei der Pelletkompression anstelle von Gleichung (??) die Näherungsformel

$$\gamma = \alpha(ka)^{1/2} - \beta k\nu_a. \quad (2.27)$$

$\alpha \approx 0.9$  und  $\beta \approx 3$  sind numerische Parameter,  $a \equiv |\nabla p_0|/\rho_0$  ist die Beschleunigung der Pelletoberfläche aufgrund des Ablationsdrucks und  $\nu_a$  ist der Quotient aus Ablationsrate (abgetragene Masse pro Flächen- und Zeiteinheit) und Massendichte in der Ablationsschicht. Kurzwellige Störungen sind also stabil in diesem relativ realistischen Modell. Um ein Gefühl für die Signifikanz der Rayleigh-Taylor-Instabilität bei der Trägheitsfusion zu bekommen, soll im Folgenden deren charakteristische Zeitskala abgeschätzt werden. Gebräuchliche Pellets besitzen häufig eine dünne Ummantelung aus einem Material mit hoher Kernladungszahl. Dies führt zu einem hohen Rückstoß und somit auch zu höherer Kompression. Die Massendichte solcher Hoch-Z-Materialien liegt bei etwa  $10g/cm^3$ , die Manteldicke bei ca.  $0.1mm$ . Der Ablationsdruck kann bis zu  $100Mbar$  betragen. Aus diesen Werten errechnet sich eine Beschleunigung von  $a \equiv |\nabla p_0|/\rho_0 \sim 10^{13}m/s^2$ . Entspricht die Wellenlänge der Störung gerade der Manteldicke, dann ergibt sich aus Gleichung (??) unter Vernachlässigung des stabilisierenden  $\beta$ -Terms eine inverse Anwachsrate von  $1/\gamma \sim 10^{-9}s$ . Diese Zeitskala ist vergleichbar mit der Einschusszeit  $\tau_E$ . D. h. das Auftreten von Rayleigh-Taylor-Instabilitäten ist bei der Trägheitsfusion unvermeidlich und begrenzt den zugänglichen Parameterraum. Insbesondere wird dadurch erzwungen, dass bei der Bestrahlung eines Pellets die Abweichung von der Kugelsymmetrie einen Wert von etwa 1% nicht überschreiten darf.

**Hohlraumtargets.** In der Praxis werden dazu sogenannte *Hohlraumtargets* eingesetzt [siehe Fig. 2.2]. Hierbei befindet sich das Pellet in einem Hohlraum, der an der Innenseite mit einem Hoch-Z-Material (z. B. Gold) bedampft ist. Der Hohlraum besitzt mehrere kleine Öffnungen, durch die der Laserstrahl eintreten kann. Letzterer trifft auf die Innenwand des Hohlraums und deponiert dort seine Energie. Dies führt zu einer starken Aufheizung des Wandmaterials, verbunden mit Strahlungsemission. Durch Reflexion innerhalb des Hohlraums bildet sich sehr schnell eine Plancksche Schwarzkörperstrahlung mit einer Temperatur von einigen 100eV aus. Die Wellenlänge des Maximums der Strahlungsleistung berechnet sich nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz zu  $\gamma_{max} \approx 10^{-9}m$ . Wir haben es also mit einem schwarzen Strahler im weichen Röntgenbereich zu tun. Diese homogene, isotrope Strahlung wird fast vollständig in einem Hohlraum, der an der Innenseite mit einem Hoch-Z-Material (z. B. Gold) bedampft ist. Der Hohlraum besitzt mehrere kleine Öffnungen, durch die der Laserstrahl eintreten kann. Der Strahlengang ist so ausgelegt, dass der Laserstrahl zunächst auf der Innenwand des Hohlraums auftrifft und dort seine Energie deponiert. Dies führt zu starker Aufheizung des Wandmaterials und zur Emission von Strahlung. Durch Reflexion innerhalb des Hohlraums bildet sich sehr schnell eine Plancksche Schwarzkörperstrahlung mit einer Strahlungstemperatur von einigen 100eV aus. Die Wellenlänge des Maximums der Strahlungsleistung berechnet sich nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz  $\gamma_{max}T = 2.9 \times 10^{-3}m^{\circ}K$  zu  $\gamma_{max} \approx 10^{-9}m$ . Wir haben es also mit einem schwarzen Strahler im weichen Röntgenbereich zu tun. Nach den obigen Ausführungen wird diese Strahlung fast vollständig vom Pellet absorbiert. Dieses Verfahren wird auch als "indirect drive" bezeichnet.

Wir kommen nun zur Energiebilanz bei der Pelletkompression. Im günstigsten Fall wird die gesamte Kompressionsenergie in innere Energie des Pellets umgesetzt. Dann ist zum Erreichen der Zielparame- ter eine Energie von  $E = 3NkT$  notwendig ( $T_e = T_i$ ,  $N =$  Anzahl der Ionen). Für unsere vorherigen Abschätzungen ( $10keV$  und  $N = 6 \times 10^{20}$ ) ergibt sich  $E = 2.8MJ$ .

Dies ist mit der freigesetzten Energie von  $1GJ$  zu vergleichen. Es ergibt sich eine Energieverstärkung von ca. 350. Auf den ersten Blick ist so eine effiziente Energiegewinnung möglich. Man muss jedoch die Wirkungsgrade der beteiligten Prozesse mit in Betracht ziehen. So ist der Wirkungsgrad zur Umwandlung der freigesetzten thermischen Energie in elektrische Energie von der Größenordnung 30%. Bei der Verwendung eines Lasers im infraroten oder sichtbaren Wellenlängenbereich kommen hierzu noch der bescheidene Wirkungsgrad des Lasers ( $\geq 10\%$ ) und die wenig effiziente Umwandlung der Strahlungsenergie in Pelletenergie ( $\geq 5\%$ ). Der gesamte Wirkungsgrad liegt somit bei  $\eta \approx 0.3 \times 0.1 \times 0.05 = 0.0015$ . Damit sollte die Energieverstärkung deutlich über  $1/0.0015 \approx 700$  liegen. Das oben vorgestellte Konzept führt also nicht zum Ziel. Ein Ausweg ergibt sich, wenn man die Heizung des Pellets durch die bei der Fusion entstehenden He-Kerne ( $\alpha$ -Teilchen) berücksichtigt. Während die Fusionsneutronen das umgebende Plasma ungehindert durchqueren, geben die  $\alpha$ -Teilchen ihre Energie (3.5MeV) durch Stöße an das umgebende Plasma ab. Gelingt es, nur einen kleinen zentralen Teil des Pellets anzuzünden und den Rest durch die  $\alpha$ -Teilchen zu heizen, so kann man mit einer erheblich kleineren Treiberenergie auskommen. Es genügt somit, das Pellet nur im zentralen Bereich von  $\leq R/10$  zu zünden, der Energiebedarf sinkt somit um den Faktor  $\geq 1000$  und die Energieverstärkung ist ausreichend. Um konstanten Druck über den Pelletradius zu erreichen, werden Hohlkugeln als Targets verwendet (siehe Abb. 1). Da dabei nur das relativ dünne Plasma im Zentrum aufgeheizt werden muss, sinkt der Energiebedarf noch weiter ab. Wir erhalten nun das folgende Konzept zur Realisierung der Trägheitsfusion:

- Ein D-T-Pellet von ca. 1mm Radius wird mit einem Energiepuls der Größenordnung 1MJ beaufschlagt. Dabei wird die Randzone stark aufgeheizt und in ein Plasma verwandelt.
- Durch den Rückstoß des von der Oberfläche abströmenden Materials wird das Pellet auf  $R \approx 0.1mm$  komprimiert. Durch optimale Pulsform ergibt sich dabei im Zentrum eine Temperatur von  $T \approx 10keV$  und eine Dichte von  $n \geq 10^{32}m^{-3}$ .
- Mit dem Erreichen dieser Werte zündet das D-T-Gemisch im Zentrum, d. h. Fusionsreaktionen  $D + T \rightarrow He + n$  finden statt.
- Die entstehenden  $\alpha$ -Teilchen heizen das umgebende Plasma auf und führen zur nahezu vollständigen Verbrennung des restlichen Materials.

Ein Treiber für die Pelletkompression muss nach den obigen Ausführungen einen Puls von 1MJ in  $10^{-10}s$  liefern. Dies entspricht einer Leistung von  $10^{16}W$ . Solch hohe Leistungen können z. B. mit Lasern erreicht werden. Der z. Z. leistungsstärkste Laser, NOVA in Livermore, USA, erreicht Pulse von  $10^{14}W$  (100kJ in  $10^{-9}$  s). Es handelt sich um einen Neodym-Laser mit Wellenlänge  $\gamma = 1.053\mu m$ , d. h. im Infrarotbereich, der im Pulsbetrieb läuft. Um den Wirkungsgrad bei der Absorption der Laserstrahlung zu erhöhen, verringert man die Wellenlänge des Laserlichts durch Frequenzverdopplung ( $\gamma = 0.527\mu m$ , d. h. grünes Licht) oder Frequenzverdreifung ( $\gamma = 0.35\mu m$ , d. h. UV-Bereich). Dies wird mit geeigneten optisch nichtlinearen Kristallen mit einer Effizienz von 70% (Frequenzverdopplung) bzw. 50% (Frequenzverdreifung) erreicht. Das Problem des niedrigen Wirkungsgrades des Lasers selbst von  $\leq 10\%$  lässt sich momentan jedoch nicht vermeiden. Aus diesem Grund untersucht man auch die mögliche Kompression der Pellets durch Beschuss mit Schwerionenstrahlen. Hier ist ein Wirkungsgrad von mehr als 25% denkbar und auch eine hohe Repetitionsfrequenz von 20Hz scheint möglich. Experimente, die v. a. auch bei der GSI in Darmstadt durchgeführt werden, lassen Pulse von 10kA und 10GeV Wismut-Ionen möglich erscheinen. Dies entspricht nach  $P = UI$  ebenfalls einer Leistung von  $10^{14}W$ . Die Verwendung von schweren Ionen macht aufgrund der hohen

stopping power die Verwendung hoher Strahlenergie bei moderatem Strom möglich. Leichte Ionen im GeV-Bereich würden das Pellet im Wesentlichen ohne Wechselwirkung durchqueren. Für Li müsste die Strahlenergie z. B. 10MeV betragen, der Strom liegt dann bei 10MA. Solch hohe Ströme lassen sich mit Teilchenbeschleunigern nur schwer realisieren. Zudem bereitet die Fokussierung wegen der hohen Raumladung der Ionen dann bereits erhebliche Probleme. Leichtionenstrahlen kommen damit nach dem heutigen Entwicklungsstand als Treiber nicht in Frage.

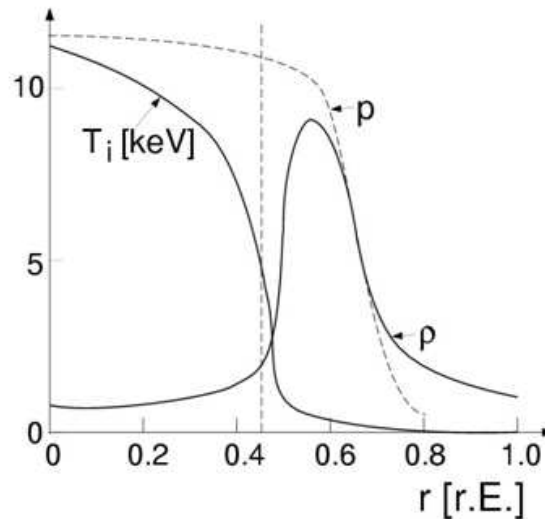


Abbildung 2.1: Um Kompressionsenergie zu sparen: zunächst nur Zentrum auf 10keV heizen, nach Zündung heizen  $\alpha$ -Teilchen den Rest des Pellets.

Wie bereits in Kapitel 1 diskutiert, kann man als Zielparame-ter das sogenannte *Fusionsprodukt* verwenden, das etwa  $nT\tau_E \geq 10^{22} m^{-3} keVs$  betragen sollte. Diesem Wert hat man sich bei Versuchen mit dem NOVA Laser unter Verwendung von Hohlraumtargets bis auf etwa  $5 \times 10^{20} m^{-3} keVs$  genähert. In diesen Versuchen wurde im Hohlraum eine Strahlungstemperatur von ca. 250eV erreicht. Die Leistungsdichte der Hohlraumstrahlung hat dann nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz  $E = \sigma T^4$  ( $\sigma = 5.7 \times 10^{-8} W / (mK^4)$ ) den Wert von  $2 \times 10^{18} W/m^2$ . Dieses führt wiederum bei vollständiger Absorption durch ein Pellet von Radius 1mm zu einer eingestrahelten Leistung von  $\approx 2.5 \times 10^{13} W$ .

Zur Zeit sind mehrere große Laser im Bau, darüber die National Ignition Facility (NIF), die bis zu 5MJ Laserenergie erreichen soll, was Zündung ermöglichen sollte. Allerdings ist für einen Reaktor Zündung von Pellets etwa 10 mal pro s erforderlich. Das erfordert eine weitere Entwicklung der Laser und auch der Targets. Für einen Reaktor sind folgende Parameter erforderlich: 10MJ Energie pro Puls, totale Intensität der Laser von  $10^{14} \dots 10^{15} W/cm^2$  am Target, 20-40ns Pulslänge, Wellenlänge:  $0.3 - 0.5 \mu m$  sowie die oben diskutierte Homogenität der Bestrahlung. Die Anforderungen könnten reduziert werden, wenn das sogenannte "fast ignition"-Konzept Anwendung finden könnte. Dabei wird in das vorkomprimierte Target ( $\rho = 600 g/cm^3$ ) mit einem Laser ( $10^{18} W/cm^2$ ) ein Kanal "gebohrt". Der eigentliche Laserpuls zur Zündung ( $10^{28} W/cm^2$ ) kann dann direkt das Pelletzentrum heizen (bzw. die von Laser erzeugten relativistischen Elektronen). Dieses Konzept hat aber bisher noch große Probleme, weil die Inhomogenität der Bestrahlung zu starken Inhomogenitäten führt.

# Kapitel 3

## Zündbedingung für Fusion mit magnetischem Einschluss

Im Gegensatz zur Fusion mit Trägheitseinschluss, bei der das Plasma nicht durch eine äußere Kraft zusammengehalten wird, soll bei der Fusion mit magnetischem Einschluss das Plasma im Magnetfeld eingeschlossen werden. Die unvermeidlichen Energieverluste aus dieser Konfiguration sollen durch die  $\alpha$ -Teilchenheizung ausgeglichen werden, d. h. das Plasma brennt stationär. Solch ein “thermonukleares Brennen” liegt z. B. in der Sonne vor, in der das Plasma durch die Gravitationskräfte eingeschlossen wird.

Wir hatten in Kapitel 1 als Zündbedingung gefunden

$$n_e \cdot T \cdot \tau_E = \text{const.} \quad (3.1)$$

Diese einfache Formulierung resultiert aus einer 0-dimensionalen Betrachtung. In der Praxis findet man ein (nahezu) flaches Dichteprofil und ein im Zentrum zugespitztes Temperaturprofil. Dies ist bei der folgenden Formulierung berücksichtigt

$$\langle n_e \rangle \cdot T_i(0) \cdot \tau_E = \text{const.} \quad (3.2)$$

Abbildung 3.1 zeigt die zeitliche Entwicklung der in den verschiedenen Fusionsexperimenten bereits erreichten  $nT\tau_E$ -Werte. In dieser Abbildung mitenthalten sind auch die bisherigen zwei D-T-Experimente an JET und TFTR<sup>1</sup> (im Fall von JET mit bis knapp 20MW Fusionsleistung), sowie eine kürzlich erreichte Einschlussverbesserung in dem (nur mittelgroßen) Tokamak-Experiment ASDEX Upgrade (IPP Garching) mit einer sogenannten Transportbarriere (s. Kap. 8 Anomaler Transport).

Typische Zielparameter für einen Fusionsreaktor mit magnetischem Einschluss sind  $n_e \approx 10^{20} m^{-3}$ ,  $T = 15 keV$  und  $\tau_E = 5 s$ . Das Tripelprodukt nimmt dabei mit  $nT\tau_E = 7.5 \times 10^{21} m^{-3} keV s$  einen Wert an, der dem bei der Trägheitsfusion abgeleiteten Tripelprodukt vergleichbar ist. Allerdings sind die Zugänge völlig unterschiedlich, und bei konstantem Produkt  $nT\tau_E$  variieren die einzelnen Faktoren zwischen den beiden Ansätzen um einen Faktor  $10^{10}$ .

---

<sup>1</sup>TFTR (Princeton, USA), und JET (Culham, GB/EU) sind die zwei großen Fusionsexperimente, die mit D-T betrieben wurden.

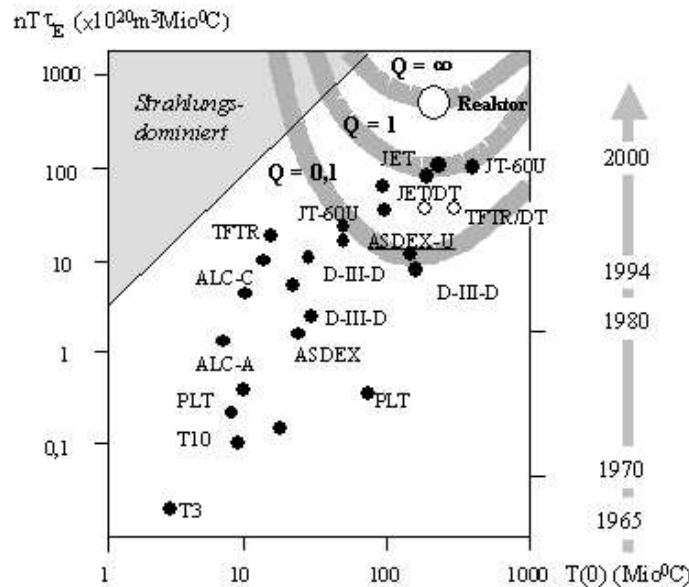


Abbildung 3.1: Bisher an magnetisch eingeschlossenen Plasmen erreichte Parameter für Temperatur und “Tripelprodukt”  $nT_{\tau_E}$ . Der eingetragene Q-Wert ist in Gleichung 3.3 definiert.

Der in Abb. 3.1 bereits als Gütemaß eingeführte Q-Wert gibt das Verhältnis der (bei D-T) erzeugten gesamten Fusionsleistung zu der (noch) erforderlichen externen Fremdheizung des Plasmas an:

$$Q \equiv \frac{P_{fus,tot}}{P_{extern}} \tag{3.3}$$

Im Einzelnen gilt:

$Q = 1$  break even (Fusionsleistung gleich von außen zugeführter Plasmaheizung)

$Q \geq 30..40$  für wirtschaftlichen Reaktorbetrieb benötigter Mindestwert

$Q = \infty$  voll gezündetes Plasma

Anmerkung: Da bei dieser Q-Definition die Neutronenleistung mitgezählt ist, beträgt das Verhältnis zwischen Fremd- und Selbstheizung im D-T-Plasma:

$$\frac{P_{extern}}{P_{fus,\alpha}} = \frac{5}{Q} \tag{3.4}$$

d. h. bei  $Q = 1$  ist das Plasma immer noch zu 80% fremdgeheizt, bei  $Q = 5$  zu 50% usw. Erst bei  $Q = 50$  wäre eine nur 10%-ige Zusatzheizung von außen erforderlich. Wegen der zwei in die Netto-Energiebilanz eingehenden Wirkungsgrade: (1) Neutronenleistung  $\rightarrow$  Elektrische Leistung und (2) Elektrische Leistung  $\rightarrow$  Plasmaheizung (jeweils mit etwa 30..35% anzusetzen), verbliebe bei einem Fusionsreaktor mit  $Q \sim 50$  dennoch nur ein Anteil von ca. 90% an nutzbarer elektrischer Leistung. Vor Abgabe in das Netz sind dann noch gut 100MW an erforderlicher Kühlleistung abzuziehen! Dementsprechend müssen Q-Werte unter 30..40 bereits als unökonomisch angesehen werden.



## Verschärfung der Zündbedingung durch Heliumasche

Bisher war idealisiert angenommen worden, dass das Fusionsplasma nur aus dem Brennstoff (z. B. D-T-Gemisch) und den zugehörigen Elektronen besteht. In der Praxis werden sich aber Verunreinigungen nicht vermeiden lassen, die zu einer verschärften Brennbedingung für die Fusionsreaktion führen. Dabei sind zwei Auswirkungen von Verunreinigungen zu unterscheiden, nämlich:

- Die entstehende He-Asche sowie auch leichte Verunreinigungen aus dem Wandmaterial (z. B. Kohlenstoff), die zu einer "Plasmaverdünnung" führen: Die Verunreinigungen sowie ihre  $Z$  Elektronen tragen zum Plasmadruck und zur Elektronendichte bei. Für vorgegebene Elektronendichte oder bei begrenztem Druck vermindert sich damit die mögliche Wasserstoffdichte; d. h. das Wasserstoffplasma wird *verdünnt*. Dieser Effekt beschränkt vor allem die mögliche Konzentration leichter Verunreinigungen wie z. B. C oder O auf Maximalwerte von einigen Prozent.
- Erhöhte Strahlungsverluste: zusätzliche Verunreinigungen führen über die Erhöhung von  $Z_{eff}$  zu erhöhten Bremsstrahlungsverlusten. Außerdem können schwere Verunreinigungen, welche selbst in einem Plasma von 10keV noch nicht vollständig ionisiert sind, auch über Linienstrahlung signifikant zum Energieverlust beitragen. Dieser Effekt begrenzt beispielsweise die maximal zulässige Konzentration von Eisen auf ca.  $10^{-3}$  und liefert z. B. für Wolfram den noch restriktiveren Wert von  $\leq 10^{-4}$ .

Die daraus resultierenden Einschränkungen sollen nachfolgend kurz diskutiert werden. Dazu werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$f_{DT} \equiv \frac{n_D + n_T}{n_e}; \quad f_{He} \equiv \frac{n_{He}}{n_e}; \quad f_C \equiv \frac{n_C}{n_e}. \quad (3.5)$$

Die Quasineutralitätsbedingung  $\left(n_e = \sum_i Z_i n_i\right)$  schreibt sich entsprechend:

$$1 = f_{DT} + 2f_{He} + \dots + 6f_C = f_{DT} + 2f_{He} + \sum_{i \leq 3} Z_i f_i. \quad (3.6)$$

Damit erhält man statt der einfachen Brennbedingung (siehe Kapitel 1)<sup>2</sup>:

$$\frac{f_{DT}^2}{4} \cdot n_e^2 \cdot \langle \sigma \nu \rangle_{DT} \cdot Q_{DT} = \quad (3.7)$$

$$\frac{3/2 \cdot n_e \cdot \left(1 + f_{DT} + f_{He} + \sum_{i \leq 3} f_i\right) \cdot k_B T}{\tau_E^*} + P_{rad}. \quad (3.8)$$

Dabei ist in der obigen Gleichung die Plasmastrahlung  $P_{rad}$  explizit mitberücksichtigt.  $\tau_E^*$  ist dementsprechend die "strahlungsbereinigte" Energieeinschlusszeit. Außerdem ist der Optimalfall  $n_D : n_T = 50 : 50$  - d. h. D-T-Mischung mit größter Reaktionsrate - angenommen. Es lässt

<sup>2</sup>Zur Vereinfachung ist für das Fusionsplasma  $k_B T_e = k_B T_i = k_B T$  gesetzt.

sich nun eine zweite Gleichung angeben, die den Teilchenhaushalt - hier speziell die "Helium-Asche" - bestimmt:

$$\frac{f_{DT}^2}{4} \cdot n_e^2 \cdot \langle \sigma v \rangle_{DT} = \frac{n_e \cdot f_{He}}{\tau_{p(He)}}. \quad (3.9)$$

Beide Gleichungen zusammengefasst (durcheinander dividiert) ergibt:

$$f_{He} = \frac{\tau_p}{\tau_E^*} \cdot \frac{3T}{Q} \cdot \frac{1}{(1 - P_{rad}/P)} \cdot \left( \frac{1 + f_{DT} + f_{He} + \sum_{i \leq 3} f_i}{2} \right). \quad (3.10)$$

Bei geringem Helium- und Verunreinigungsgehalt kann der letzte Klammerausdruck gleich Eins gesetzt werden, sodass:

$$f_{He} \approx \frac{\tau_p}{\tau_E^*} \cdot \frac{3k_B T}{Q} \cdot \frac{1}{1 - P_{rad}/P}. \quad (3.11)$$

Der Heliumanteil steigt also (logischerweise) mit dem Verhältnis von Teilchen- zu Energieeinschlusszeit, sowie mit der Plasmatemperatur an.

Allein mit der Heliumasche ergibt sich eine deutliche *Verdünnung* des Plasmas und damit ein Rückgang der Fusionsleistung (bei vorgegebenem Plasmadruck). Unter Verwendung der Quasineutralitätsbedingung (s. o.) folgt bei 10% Helium (und ohne weitere Verunreinigungen) bereits  $f_{DT} = 0.8$ ; also ein Rückgang der Fusionsleistung auf etwa 64%. Für eine noch genauere Diskussion ist die Strahlung explizit mitzunehmen. Beschränkt man sich allein auf die Bremsstrahlung (d. h. Linienstrahlung durch schwere Verunreinigungen, die *Zyklotronstrahlung* wird vernachlässigt), so erhält man:

$$P_{rad,brems} = c_{brems} \cdot n_e \cdot \sum_{i \leq 1} Z_i^2 \cdot n_i \cdot \sqrt{T} \quad (3.12)$$

$$= c_{brems} \cdot n_e^2 \cdot Z_{eff} \cdot \sqrt{T}. \quad (3.13)$$

Die "effektive Kernladungszahl"  $Z_{eff}$  ergibt sich nach Art und Menge der Verunreinigungen, entsprechend der quadratischen Abhängigkeit der strahlungsbewirkenden Stöße von Z:

$$Z_{eff} \equiv \frac{\sum_i Z_i^2 \cdot n_i}{\sum_i Z_i \cdot n_i} = \sum_{i \leq 1} Z_i^2 f_i. \quad (3.14)$$

Dies in die Zündbedingung eingesetzt, ergibt:

$$n_e^2 \cdot \left\{ \frac{f_{DT}^2}{4} \cdot \langle \sigma v \rangle_{DT} \cdot Q_{DT} - c_{brems} \cdot \left( f_{DT} + 4f_{He} + \sum_{i \leq 3} Z_i^2 f_i \right) \cdot \sqrt{T} \right\} \quad (3.15)$$

$$= \frac{3/2 \cdot n_e \cdot \left(1 + f_{DT} + 2f_{He} + \sum_i Z_i f_i\right) \cdot k_B T}{\tau_E^*}. \quad (3.16)$$

Hinzu kommt die Heliumbilanzgleichung, d. h. die Heliumerzeugung (linke Seite) und der Heliumverlust, beschrieben durch die Teilcheneinschlusszeit (rechte Seite):

$$\frac{f_{DT}^2}{4} \cdot n_e^2 \cdot \langle \sigma v \rangle_{DT} = \frac{n_e \cdot f_{He}}{\tau_p}. \quad (3.17)$$

Die beiden obigen Gleichungen zusammengefasst führen auf eine kubische Gleichung für  $f_{He}$ , wobei noch  $\tau_p/\tau_E$  (als Parameter) und die Quasineutralitätsbedingung einzufügen sind. Man erhält auf diese Weise deutlich eingeschränkte Brennbedingungen für das Fusionsplasma.

Dies wird aus dem nachfolgenden  $n_e T \tau_E$ -Diagramm deutlich, indem die Brennkurven für verschiedene Verhältnisse von  $\rho = \tau_p/\tau_E$  im Vergleich zum Idealfall (d. h.  $\rho = 0$ , kein Helium) dargestellt sind:

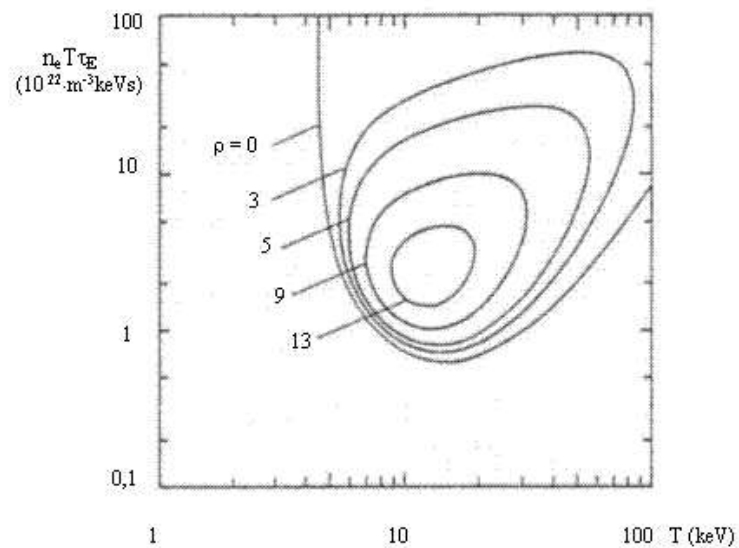


Abbildung 3.2: Zündbedingung für verschiedene Verhältnisse von  $\rho = \tau_p/\tau_E$ .

Aus der Abbildung entnimmt man die sich mit “verbesselter” Teilcheneinschlusszeit<sup>3</sup> zunehmend verschärfenden Brennbedingungen des gezündeten Fusionsplasmas. Während im Fall von  $\rho = 0$  (d. h. Helium-(Teilchen)-Einschlusszeit ist Null und damit auch die Heliumdichte im Plasma) die zuvor besprochene ideale Zündkurve gilt, verschlechtern sich die Brennbedingungen mit zunehmendem  $\rho$  dramatisch. Interessant ist dabei das Schließen der Brennkurven. Die genauere Analyse zeigt, dass im oberen Teilbereich (= große  $nT\tau$ -Werte, sehr guter Einschluss) das Plasma soweit mit Heliumasche angereichert ist, dass die Fusionsleistung bereits sehr kleine Werte annimmt und die Strahlungsverluste bestimmend werden. Bemerkenswert ist weiter, dass die Kurven schließlich (jenseits von  $\rho \sim 13$ ) auf einen Punkt zusammenschrumpfen und

<sup>3</sup>Ein optimales Fusionsplasma sollte also eine möglichst **geringe Teilcheneinschlusszeit**, aber eine genügend **große Energieeinschlusszeit** aufweisen.

### 28KAPITEL 3. ZÜNDBEDINGUNG FÜR FUSION MIT MAGNETISCHEM EINSCHLUSS

danach kein gezündeter Betrieb mehr möglich ist. (Dies tritt etwa ab einem He-Aschegehalt von  $> 15\%$  auf).

Die Brennbedingungen werden noch weiter eingeschränkt, wenn neben dem inhärent mit der Fusion verbundenen Helium noch weitere Verunreinigungen in das Plasma kommen. Dies ist praktisch unvermeidbar, und so werden für das ITER-Projekt etwa  $1 - 2\%C$ ;  $0,1\%O$ ;  $0,01 - 0,02\%Fe$  vorgegeben, wobei diese Werte in den gegenwärtigen Fusionsexperimenten nur mit Schwierigkeiten erreicht werden können. Insbesondere bei starker (Zusatz-)Heizung werden in der Regel deutlich höhere Verunreinigungswerte beobachtet. Das (im Vergleich zu den gegenwärtigen Experimenten) wesentlich größere Verhältnis von Volumen zu Oberfläche eines Fusionsplasmas führt allerdings in die günstige Richtung.

Das folgende Diagramm zeigt, wie - bei Berücksichtigung der entsprechenden Verdünnung und der zugehörigen erhöhten Strahlungsverluste - das gerade noch zulässige  $\tau_p/\tau_E$  - Verhältnis weiter abfällt (Schrumpfen der letzten Brennkurve auf Null, vgl. Abbildung ??).

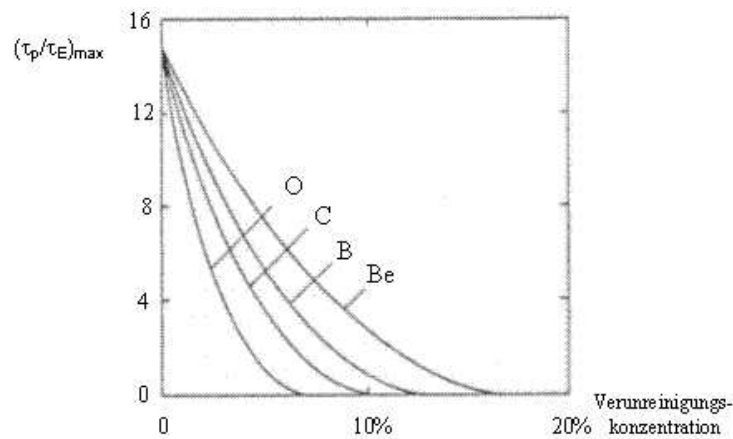


Abbildung 3.3: Maximal erlaubtes Verhältnis von Teilchen- zu Energieeinschlusszeit bei gegebener Verunreinigungskonzentration.

# Kapitel 4

## Magnetischer Einschluss

Wir haben bereits im vergangenen Semester bei Behandlung der Magnetohydrodynamik gefunden, dass Druckgradienten aufrechterhalten werden können durch Ströme senkrecht zu einem Magnetfeld. Die entsprechende Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p. \quad (4.1)$$

Damit ergeben sich also die zwei einfachsten Gleichgewichtsgeometrien - jeweils nach der Stromrichtung benannt - der  $\Theta$ - und der  $Z$ -Pinch:

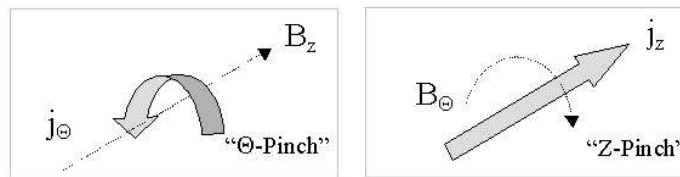


Abbildung 4.1: Magnetfeld- und Stromrichtung bei  $\Theta$ - und  $Z$ -Pinch.

Beide Gleichgewichtsvarianten sollen nachfolgend etwas genauer untersucht werden.

### 4.1 $\Theta$ -Pinch

In diesem Fall ist eine zylindrische Plasmasäule - wie in Abbildung 4.2 dargestellt - in ein linear in **z-Richtung** ausgedehntes Magnetfeld  $B_z$  eingebettet. Um den Druck dieses Plasmas in  $r$ -Richtung abzufangen, ist demnach ein Strom  $j_{\perp} = j_{\Theta}$  in poloidaler Richtung (Winkel-Koordinate  $\Theta$ ) erforderlich. Dabei kann man anhand der obigen Gleichung sofort ersehen, dass dieser Strom  $j_{\Theta}$  **diamagnetisch** orientiert ist und das von aussen angelegte Magnetfeld  $B_{z0}$  im Plasmainterinneren **verringert**.

Bei dieser Feldreduktion im Plasmainterinneren lassen sich offensichtlich die beiden im Folgenden dargestellten Grenzsituationen unterscheiden, nämlich:

Der in Abb. ?? dargestellte Fall wird als “**Niedrig- $\beta$** ” - und der in Abb. ?? als “**Hoch- $\beta$** ”-Plasma bezeichnet, wobei  $\beta = \frac{p}{B_0^2 2\mu_0}$  gilt. Wie man sofort erkennt, verkompliziert sich die Lösung der “einfachen” Gleichung  $\vec{j} \times \vec{B}$  mit steigendem  $\beta$ , denn jetzt wird das äußere Feld im Plasmainterinneren wesentlich durch den diamagnetischen Strom verändert, der selbst wieder vom

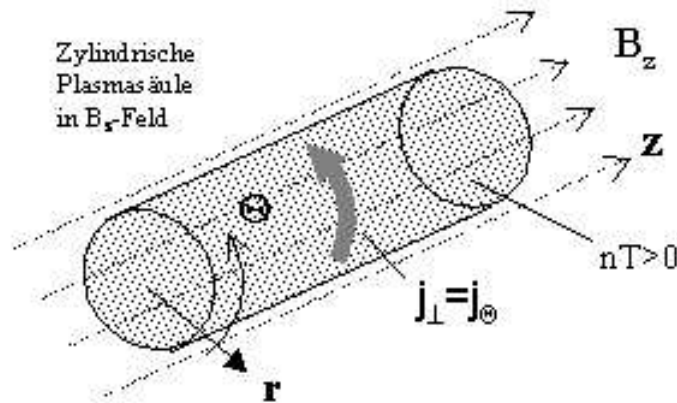


Abbildung 4.2: Diamagnetische Ströme (durch den Druckgradienten getrieben) bewirken den Einschluss im  $\Theta$ -Pinch.

Druckgradienten abhängt.

Zunächst soll aber der einfachere “**Niedrig- $\beta$** ”-Fall weiterbehandelt werden: Dazu ist zunächst zu klären, warum ein Strom mit guter Leitfähigkeit senkrecht zum Magnetfeld fließt. Der einfache Grund dafür ist:

Mit einem endlichen Druckgradienten ist inhärent ein  
diamagnetischer Stromfluss verbunden!

Dieser Strom wird - wie bei der normalen Spitzer-Leitfähigkeit - lediglich durch die Stoßreibung behindert, sodass sich die normale Spitzer-Leitfähigkeit (bzw. Spitzer-Widerstand) einstellt. (genau kommt noch ein Faktor 2 hinzu, also:  $\eta_{\perp} = 2 \times \eta_{\parallel}$ -Spitzer). Die Ursache für diesen “**inhärenten Stromfluss**” wird anhand der zwei Spezialfälle für einen endlichen Druckgradienten deutlich:

Spezialfall a): Der Druckgradient werde allein durch einen Dichtegradienten dargestellt und die Temperatur sei dementsprechend konstant über den Radius ( $T_e(r) = const$ ). Dann ergibt sich das in Abb. (??) dargestellte Bild für die gyrierenden Teilchen (hier die Elektronen). Das Ergebnis ist: Durch die **unterschiedliche Anzahldichte** der gyrierenden Elektronen kompensieren sich die auf- und abwärts gyrierenden Ladungen nicht; es bleibt vielmehr eine Nettoladungsbe-  
wegung der Elektronen (im Bild) nach unten. “Elektrotechnisch” ergibt sich damit eine diamagnetische Stromdichte  $j_{dia}$  nach oben.

Spezialfall b): Der Druckgradient sei nur durch einen Temperaturgradienten hervorgerufen und die Dichte sei diesmal konstant ( $n_e(r) = const$ ). In diesem Fall ist die Anzahldichte der auf- und abwärtsströmenden Ladungen zwar gleich, die Elektronen laufen aber mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ( $\propto T^{1/2}$ ) auf unterschiedlich großen Gyrobahnen. Wieder verbleibt eine Nettobewegung (nach unten) bzw. eine Stromdichte  $j_{dia}$  (nach oben).

In realen Systemen treten die beiden Spezialfälle (??) und (??) natürlich in Kombination auf. Ein wenig komplizierter wird das Ganze, wenn wir zur “**Hoch- $\beta$** ”-Situation übergehen. In diesem Fall ist das von außen angelegte Magnetfeld vergleichsweise klein und der diamagnetische

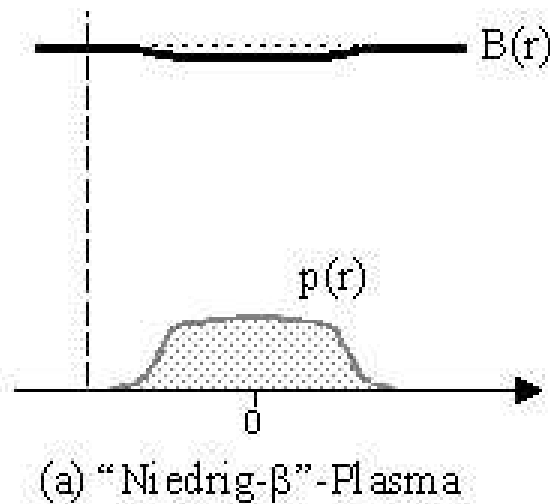


Abbildung 4.3: Das äußere Magnetfeld ist so groß, dass der benötigte  $j_{\perp}$ -Strom vernachlässigbar klein ausfällt. Das von außen angelegte Feld bleibt durch das Plasma nahezu ungestört.

Strom entsprechend groß. Es kommt zu einer deutlichen "Mulde" im Magnetfeld und damit zu einem Gradienten in  $B$ . Damit ergibt sich das in Abb. (??) gezeigte Bild: Die Elektronen gyrieren jetzt nicht mehr nur "am Fleck" (und machen so den Strom durch unterschiedliche Bilanzierung), sondern vollführen zugleich noch eine  $B\nabla B$ -Driftbewegung. Wie man sich leicht überlegt, ist diese Drift im Bild nach oben gerichtet und ergibt damit interessanterweise einen **paramagnetischen** Strombeitrag  $j_{Drift}$ . Damit ergäbe sich eine Kraft, die in die gleiche Richtung wie der Druckgradient wirkt und damit eigentlich das Gleichgewicht zerstören würde. Der Magnetfeldgradient hat - neben der Drift - aber noch eine weitere Wirkung: Genau wie der Temperaturgradient bewirkt der (entgegengesetzt gerichtete) Feldgradient, dass die Gyroradien von innen ( $T = \text{groß}$  bzw.  $B = \text{klein}$ ) nach aussen ( $T = \text{klein}$  bzw.  $B = \text{groß}$ ) abnehmen. Berücksichtigt man den  $\nabla B$  (analog zu  $\nabla T$ ) bedingten diamagnetischen Strombeitrag, so stellt man fest, dass dieser den paramagnetischen Driftstrom genau kompensiert. Für das Hoch- $\beta$ -Plasma gilt damit die gleiche Formel:

$$\nabla p_e = \left( \vec{j}_{\nabla n_e} + \vec{j}_{\nabla T_e} \underbrace{\vec{j}_{\nabla B, e} - \vec{j}_{Drift, e}}_0 \right) \times \vec{B}(r) = \vec{j}_{\nabla p_e}(r) \times \vec{B}(r). \quad (4.2)$$

Bisher wurden nur die **Elektronen** behandelt. Für die **Ionen** gelten natürlich genau die gleichen Betrachtungen. Diese machen dementsprechend ihren "eigenen" Strombeitrag zum Gleichgewicht, also:

$$(\vec{j}_e + \vec{j}_i) \times \vec{B} = \nabla p_e + \nabla p_i. \quad (4.3)$$

Die Gesamt-Stromdichte lässt sich wiederum über die 2. Maxwell-Gleichung (Amperesches Gesetz) als Rotation des Magnetfeldes schreiben. Damit folgt eine weitere Formulierung der Gleichgewichtsbedingung, nämlich:

$$\nabla p = \left( \frac{1}{\mu_0} \cdot \nabla \times \vec{B} \right) \times \vec{B}. \quad (4.4)$$

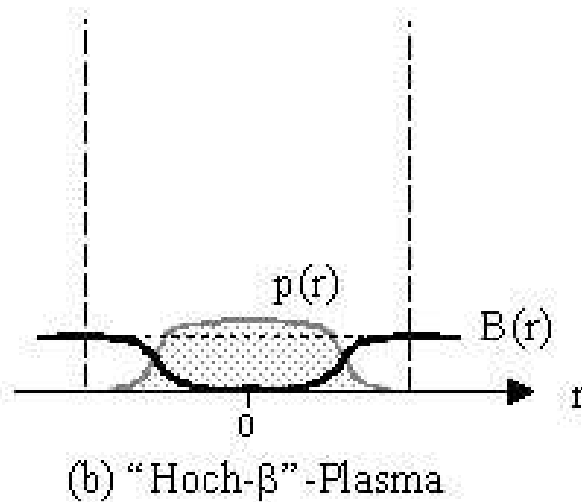


Abbildung 4.4: Das äußere Feld ist so klein, dass der entsprechend hohe Strom  $j_{\perp}$  das B-Feld im Inneren des Plasmas stark absenkt (im Grenzfall auslöscht,  $\beta = 1$ ).

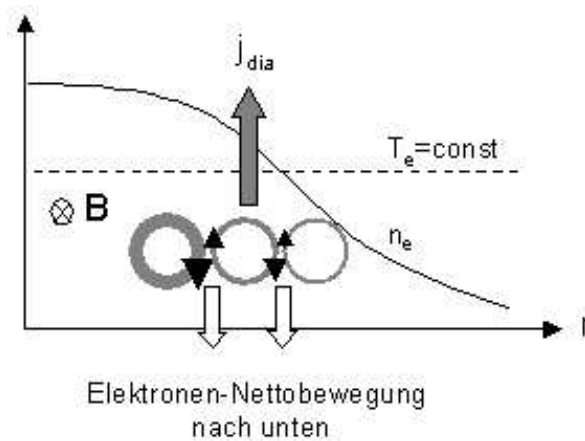


Abbildung 4.5: Diamagnetischer Strom bei endlichem Dichtegradienten, aber konstanter Temperatur.

Mit der Vektorrelation:

$$(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = -\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = -\vec{B} (\nabla \vec{B}) + (\vec{B} \nabla) \vec{B} \quad (4.5)$$

$$= -\frac{\nabla B^2}{2} + (\vec{B} \nabla) \vec{B} \quad (4.6)$$

ergibt sich weiter:

$$\nabla \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{(\vec{B} \nabla) \vec{B}}{\mu_0} \approx 0. \quad (4.7)$$

Da der Gradient längs des Magnetfeldes für den  $\Theta$ -Pinch in guter Näherung vernachlässigt werden kann, gilt schließlich:



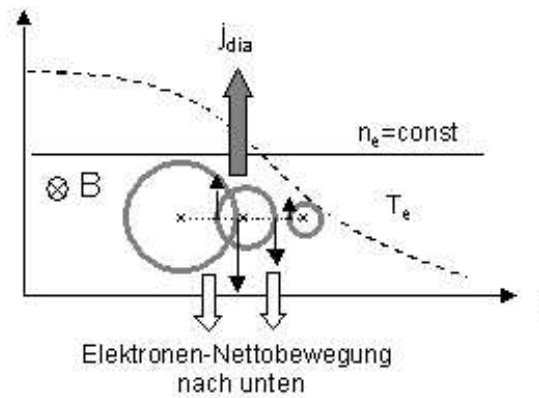


Abbildung 4.6: Diamagnetischer Strom durch endlichen Temperaturgradienten bei konstanter Dichte.

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{const} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}. \quad (4.8)$$

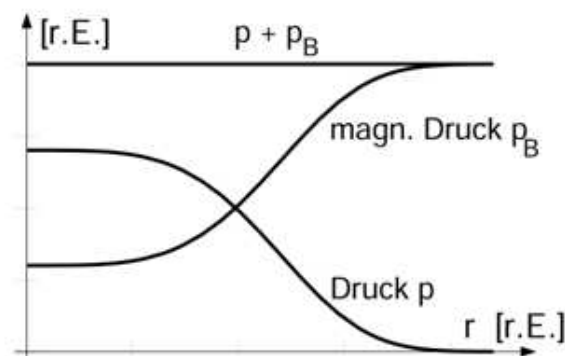


Abbildung 4.7: Radiale Profile von Plasma- und Magnetfelddruck im  $\Theta$ -Pinch. Ihre Summe ist stets konstant.

Die Gleichung besagt, dass gasdynamischer Druck  $p$  und magnetischer Druck  $B^2/2\mu_0$  zusammen eine Konstante bilden. Diese kann gleichgesetzt werden mit dem äußeren Magnetfelddruck  $B_0^2/2\mu_0$ . Der früher bereits definierte  $\beta$ -Wert ergibt sich damit zu

$$\beta \equiv \frac{p}{B_0^2/2\mu_0} = 1 - \frac{B_i^2}{B_a^2} \quad (4.9)$$

(wobei  $B_i = B =$  inneres Feld,  $B_a = B_0 =$  äußeres Feld).

Dieser Parameter wird dabei meist in % angegeben. Mit  $\beta = 1$  bzw. 100% wäre daher die maximale (ideale) Magnetfeldausnutzung gegeben.

## 4.2 Z-Pinch

Anders ist die Situation, wenn wir zum Z-Pinch mit einem **gekrümmten**  $B_\Theta$ -Feld übergehen. Hier gilt offensichtlich nicht  $p + B^2 = \text{const}$ , wie aus dem in Abb. (??) gezeigten Beispiel ersichtlich ist, denn: Das um einen stromdurchflossenen Leiter herumlaufende poloidale Feld fällt  $\propto 1/r$  (d. h.  $B^2 \propto 1/r^2$ ) ab, ohne dass ein Plasma vorliegt.

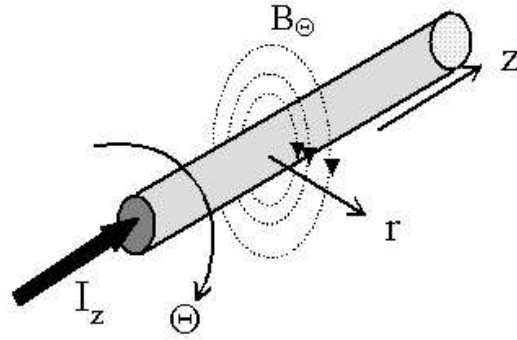


Abbildung 4.8: Plasmastrom und durch ihn erzeugtes Magnetfeld im Z-Pinch.

Auch für diesen Fall lässt sich auf einfache Weise eine Beziehung für das Druckgleichgewicht herleiten. Es gilt:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} = j_\Theta \cdot B_z - j_z \cdot B_\Theta. \quad (4.10)$$

Beim “reinen” Z-Pinch soll kein  $B_z$ -Feld vorhanden sein, sodass der entsprechende  $j \times B$ -Term in diesem Fall wegfällt. (Anmerkung: Dieser Term fiel auch weg, wenn  $B_z \neq 0$  ist, aber kein poloidaler Plasmastrom fließt. Das  $B_z$ -Feld behält dann den von außen vorgegebenen Vakuumverlauf und trägt nicht zum Plasmadruck bei!)

Da für den Z-Pinch offensichtlich der von außen eingespeiste Strom die führende Größe ist und das  $B_\Theta$ -Feld daraus folgt, versuchen wir jetzt zunächst  $j_z$  und dann  $B_\Theta$  durch den Plasmastrom  $I_z(r)$  auszudrücken und erhalten:

$$B_\Theta = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \int_0^r 2\pi r' \cdot dr' \cdot j_z(r') = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I_z(r). \quad (4.11)$$

Dabei ist dann  $I_z(r)$  der Gesamtstrom innerhalb des Radius  $r$ . Wie man der vorstehenden Gleichung entnimmt, gilt außerdem:

$$\frac{dI_z(r)}{dr} = 2\pi r \cdot j_z(r). \quad (4.12)$$

Dies in die Kraftbilanz eingesetzt führt auf:

$$\nabla p = -\frac{\mu_0}{(2\pi r)^2} \cdot \frac{dI_z}{dr} \cdot I_z = -\frac{\mu_0}{2 \cdot (2\pi r)^2} \cdot \frac{d(I_z^2)}{dr}. \quad (4.13)$$

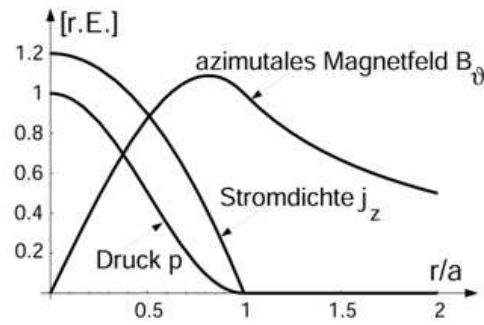


Abbildung 4.9: Radiale Profile von Plasmadruck, Stromdichte und Magnetfeld im Z-Pinch.

Die entsprechenden radialen Verläufe von  $p$ ,  $j_z$  und  $B_\theta$  sind in der folgenden Abbildung zu sehen.

Die Gleichung (??) können wir integrieren (zuvor mit  $2\pi r^2$  multipliziert) und erhalten:

$$\int_0^r (2\pi r')^2 \nabla p(r') \cdot dr' = -\frac{\mu_0}{2} \cdot I_z^2(r) \quad (4.14)$$

oder weiter umgeformt (d. h. partiell integriert):

$$(2\pi r)^2 p(r) \Big|_0^r - 4\pi \int_0^r p(r') \cdot 2\pi r' \cdot dr' = -\frac{\mu_0}{2} \cdot I_z^2(r). \quad (4.15)$$

Da der erste Term sowohl auf der Achse ( $r = 0$ ), wie (realistischerweise) auch an der Oberfläche verschwindet ( $p(a) = 0$ ), folgt weiter:

$$\int_0^a p(r) \cdot 2\pi r \cdot dr = \mu_0 \cdot \frac{I_0^2}{8\pi}. \quad (4.16)$$

Nehmen wir weiterhin eine konstante (mittlere) Temperatur über den Plasmaquerschnitt an, entsprechend:

$$p = n_e k_B T_e + n_i k_B T_i = (n_e + n_i) \cdot T k_B \quad (4.17)$$

so gilt offensichtlich:

$$N k_B T = \mu_0 \cdot \frac{I_0^2}{8\pi}. \quad (4.18)$$

Dabei gibt  $N$  die Gesamtzahl der Teilchen über den Plasmaquerschnitt (“Liniendichte”) an, die dann eine zum Quadrat des Gesamtstroms  $I_0$  proportionale Temperatur annehmen.

Dies ist die sogenannte “**Bennett-Beziehung**” für das Gleichgewicht des sogenannten “**Z-Pinches**”.

### 4.3 Screw-Pinch, Reversed-Field-Pinch

Wir werden im folgenden Kapitel sehen, dass sowohl der  $\Theta$ - als auch der  $Z$ -Pinch schlechte Stabilitätseigenschaften haben. Wir wollen daher Konfigurationen betrachten, in denen sowohl in  $\Theta$ - als auch in  $z$ -Richtung ein Magnetfeld vorliegt.

Überlagert man dem  $Z$ -Strom zusätzlich ein  $B_z$ -Feld, welches aber nicht in die Druckbilanz eingreift (d. h.  $j_\Theta = 0, B_z = const$ ), so ändert sich natürlich nichts an der Gleichgewichtsbedingung. Fließen jedoch auch noch poloidale Ströme im Plasma (d. h. das  $B_z$ -Feld im Plasma wird gegenüber dem ursprünglichen Vakuum-Verlauf verändert), so ergeben sich als neue Konfigurationen der **Screw-Pinch** (“Schrauben-Pinch”) oder ein Pinch mit Vorzeichenumkehr des überlagerten  $B_z$ -Feldes (“**Reversed-Field-Pinch**”).

Da der Screw-Pinch als Vorstufe der gegenwärtigen toroidalen Einschussysteme zu sehen ist, soll er zu deren besserem Verständnis hier etwas näher erläutert werden. Die nachfolgende Abbildung zeigt den sich in diesem Fall einstellenden schraubenförmigen Verlauf der Magnetfeldlinien.

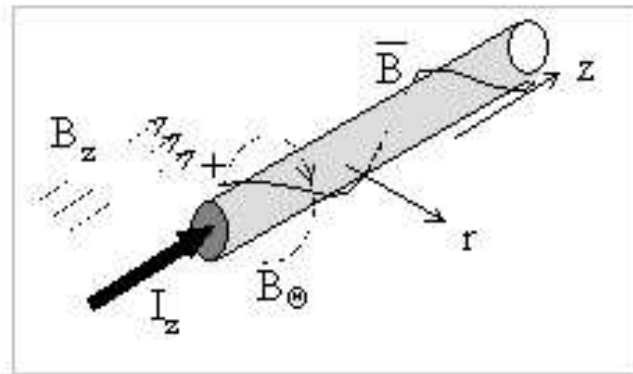


Abbildung 4.10: Plasmastrom und Magnetfeldkonfiguration im Screw-Pinch.

Die Steigung der Feldlinien kann je nach Verhältnis von  $B_z$ - zu  $B_\Theta$ -Feld - unterschiedlich groß sein. Außerdem muss man nach der Größe des eingeschlossenen Plasmadrucks unterscheiden: Der Screw-Pinch kann, wie in den folgenden beiden Bildern dargestellt, sowohl als “Niedrig- $\beta$ -Plasma” wie auch als “Hoch- $\beta$ -Plasma” betrieben werden.

Dabei verhält das Plasma sich in beiden Fällen a) und b) **diamagnetisch** bezüglich des überlagerten  $B_z$ -Feldes, d. h. nicht nur der Plasmastrom  $I_z$  (bzw. sein  $B_\Theta$ -Feld), sondern auch das  $B_z$ -Feld trägt mit zum Plasmaeinschluss ( $\nabla p$ ) bei. Im ersten Fall a) ist lediglich ein sehr großes  $B_z$ -Feld überlagert (= große Ganghöhe der Schraube) und der Plasmadruck vergleichsweise gering gewählt worden, während im zweiten Fall b) ein geringes  $B_z$ -Feld bei vergleichsweise hohem Plasmadruck zu einer Hoch- $\beta$ -Situation führt (= sehr flache Ganghöhe der Schraubenlinie des Gesamtfeldes).

Grundsätzlich kann ein von zwei Magnetfeldern eingeschlossenes Plasma aber auch **paramagnetisch** bezüglich der einen Feldkomponente eingestellt werden. Diese Situation ist bei der folgenden Abbildung (??) gegeben: Der Druck durch  $I_z$ -Strom bzw.  $B_\Theta$ -Feld ist so hoch, dass

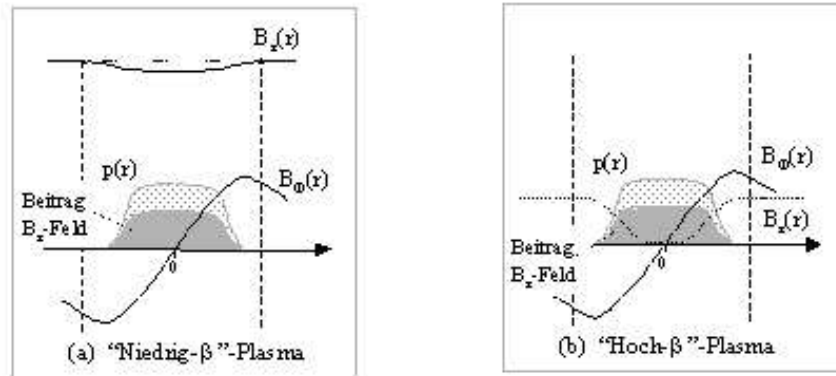


Abbildung 4.11: Schematische Darstellung des Screw-Pinches für niedrigen bzw. hohen Plasmadruck.

er von dem kleinen Plasmadruck nicht aufgefangen werden kann. Es kommt dennoch zu einem Gleichgewicht, weil jetzt das  $B_z$ -Feld komprimiert werden kann. Bezüglich dieses Feldes wird das Plasma damit paramagnetisch!

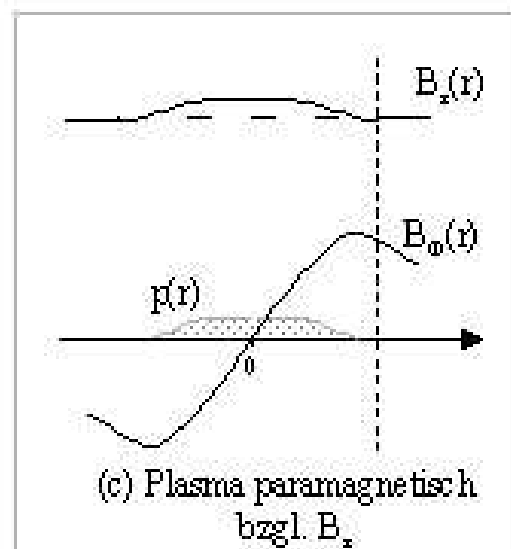


Abbildung 4.12: Für sehr geringen Plasmadruck wird das Plasma paramagnetisch bezüglich des  $B_z$ -Feldes.

Diese Situation - ein Magnetfeld wird durch ein anderes komprimiert - kann sogar in extremer Weise fortgeführt werden. Dieser Grenzfall ist offensichtlich dann gegeben, wenn das  $B_z$ -Feld soweit komprimiert und entsprechend erhöht wird, dass für den Plasmadruck "kein Platz" mehr bleibt. Das entsprechend drucklose Plasma dient jetzt nunmehr als "Druckvermittler" zwischen den beiden Feldkomponenten, wobei aber durchaus starke Ströme im Plasmavolumen fließen können. Diese Ströme müssen jedoch längs der Feldlinien laufen ( $\vec{j} \parallel \vec{B}$ ), wobei gilt:

$$\nabla p = j_{\theta} B_z - j_z B_{\theta} \approx 0. \quad (4.19)$$

Wegen der nötigen Leitfähigkeit (= hohe Plasma-Temperatur) bei zugleich verschwindendem Druck wird man diese Situation insbesondere in Gebieten kleiner Dichten, also vor allem in Außenbereichen von heißen Plasmen finden. Man bezeichnet diesen (oft nur lokalen) Sonderfall des drucklosen Plasmas als **“kräftefreies Gleichgewicht”**.

Eine verwandte Situation - d. h. eine Feldkomponente wird durch eine andere, zu dieser orthogonalen Komponente komprimiert -, stellt der **Reversed-Field-Pinch** dar, der in den Anfängen der Fusionsforschung eine große Rolle gespielt hat.

Wie in Abb. (??) dargestellt, wird dabei ein von außen vorgegebenes  $B_z$ -Feld durch einen vergleichsweise hohen Strom  $I_z$  stark komprimiert (Anfangsphase) und dann in einer zweiten Phase in der Feldrichtung umgekehrt. Aufgrund der hohen Plasmaleitfähigkeit verbleibt das umgekehrte Feld auf einen äußeren Bereich begrenzt (Endzustand).

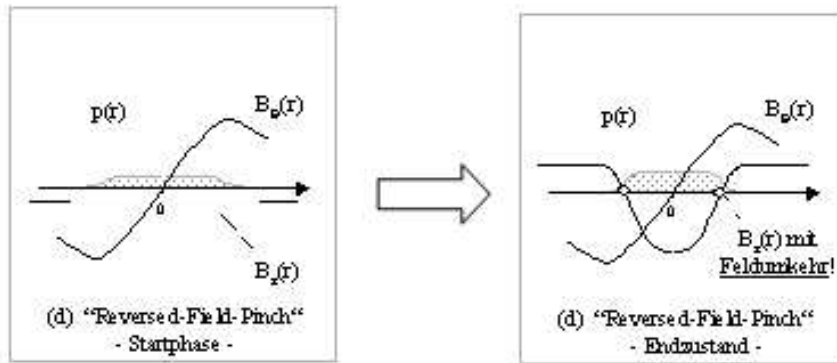


Abbildung 4.13: Magnetfeldkonfiguration im Reversed-Field-Pinch. Nach der Startphase wird die Richtung des von außen angelegten  $B_z$ -Feldes umgekehrt. Wegen der großen Plasmaleitfähigkeit bleibt das Feld im Plasmazentrum eingefroren.

Interessant ist, dass der magnetische Fluss  $\Phi$  in  $Z$ -Richtung durch die Feldumkehr sehr klein und - im Prinzip - auch Null werden kann. Damit ergibt sich eine Anordnung mit u. U. extrem kleiner Induktivität ( $L \propto \Phi$ ) trotz hoher gespeicherter Magnetfeldenergie ( $W_{\text{magn}} \propto B^2$ ). Ein solches Gleichgewicht kann explosionsartig zusammenbrechen, da aufgrund der kleinen Induktivität eine extrem schnelle Änderung der Magnetfeldenergie eintreten kann. Überhaupt gibt es für den Reversed-Field-Pinch ein sehr beschränktes Stabilitätsgebiet.

Alle drei in diesem Abschnitt diskutierten Plasmagleichgewichte mit kombiniertem  $B_z$ - und  $B_\theta$ -Feld lassen sich über die allgemeine Gleichgewichtsgleichung ( $\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p$ ) auch leicht quantitativ beschreiben. Man erhält jetzt:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} = j_\theta \cdot B_z - j_z \cdot B_\theta. \quad (4.20)$$

Für die rechte Seite der Gleichgewichtsgleichung sind nun nur noch die zuvor schon hergeleiteten Ausdrücke von  $\Theta$ - bzw.  $Z$ -Pinch einzusetzen, womit folgt:

$$\nabla \left( p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{\mu_0}{2 \cdot (2\pi r)^2} \cdot \frac{d(I_z^2)}{dr}. \quad (4.21)$$

Alle zuvor beschriebenen Konfigurationen wurden zu Beginn der Fusionsforschung - zunächst linear und später in toroidaler Geometrie - realisiert und umfassend experimentell untersucht. Wie im nachfolgenden Kapitel ausführlicher beschrieben, konnten dabei schon vor einigen Jahrzehnten beachtliche Plasmaparameter erreicht werden (Temperaturen bis an 100 Millionen Grad bei Plasmadichten, die weit über den heute angestrebten Werten lagen). Zugleich stellte sich aber bald heraus, dass alle diese Plasma-Gleichgewichte zum Einsatz für einen Fusionsreaktor nicht geeignet waren. Die Gründe waren mangelnde Stabilität (Z-Pinch, Screw-Pinch, ReversedField-Pinch) oder zu geringe Einschlusszeit aufgrund von axialen Verlusten ( $\Theta$ -Pinch).

## 4.4 Hochbeta-Plasmen im Detail: Z- und $\Theta$ -Pinch Experimente

In den Anfängen der Fusionsforschung (60'er - 70'er Jahre) wurden insbesondere der Z- und der  $\Theta$ -Pinch - also Hoch- $\beta$ -Plasmen - an allen mit der Fusionsforschung befassten Forschungsinstituten sehr intensiv untersucht. Die Gründe dafür waren:

- Der Fusionsreaktor sollte bei gegebenem Magnetfeld (= Kostenfaktor!) eine größtmögliche Leistungsdichte erreichen, daher wurden in erster Linie "Hoch- $\beta$ -Gleichgewichte" angestrebt.
- Als leistungsstarkes Heizverfahren (viele Megawatt!) zur Erzeugung und Aufheizung eines Hoch- $\beta$ -Plasmas stand zunächst nur die schnelle Stoßwellenkompression durch extrem schnell ansteigende Magnetfelder (Zeitskala  $\mu s$ ) zur Verfügung. Dabei konnten in diesen "Pinch"-Anordnungen bereits sehr heiße und sehr dichte Plasmen erzielt werden<sup>1</sup>.

Da derartige Hochbeta-Anordnungen recht gut das Verständnis von Plasmaeinschluss und Plasmastabilität vermitteln können, sollen die zwei charakteristischen Hochbeta-Konzepte - Z- und  $\Theta$ -Pinch - nachfolgend kurz erläutert werden:

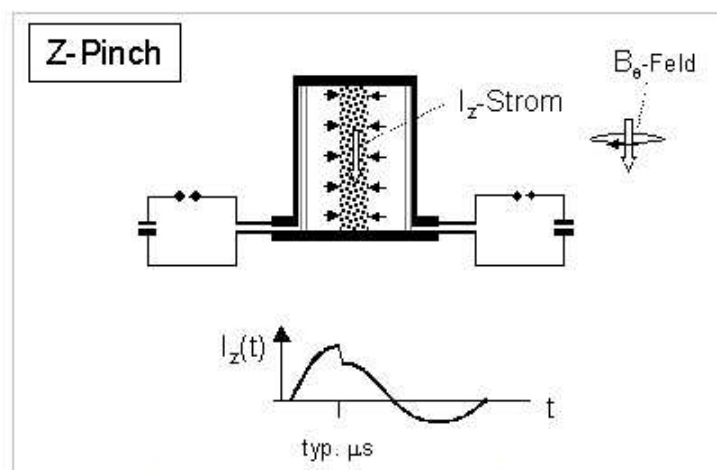


Abbildung 4.14: Schematischer Aufbau eines Z-Pinches.

<sup>1</sup>Erreicht wurden zu der Zeit: Ionentemperaturen bis 100 Mio. K, Elektronendichten bis über  $10^{22} m^{-3}$  (d. h. 100 x mehr als in den modernen Fusionsexperimenten). Mit  $\beta \approx 1$  ergaben sich dabei Plasmadrucke bis 400 bar bei Magnetfeldern bis 20 Tesla. Für einen stationär laufenden Fusionsreaktor wären die entsprechenden Leistungsflüsse (Fusionsleistung, Neutronenfluss proportional  $p^2$ ) nach heutigem Kenntnisstand sogar viel zu hoch!

Eine niederinduktive Kondensatorbatterie (typ. 30-40 KV/100 kJ bis MJ) wird über eine zylindrische Plasmasäule entladen (= Ausgangsplasma). Der rasch ansteigende  $Z$ -Strom bleibt an der Oberfläche der Säule (Skinneffekt!) und erzeugt hier ein  $B_\theta$ -Feld. Die  $j_z \times B_\theta$ -Kraft komprimiert die Säule und heizt sie dabei auf. (Die schnell ansteigende Induktivität der komprimierenden Plasmasäule führt zu dem charakteristischen Stromknick zum Zeitpunkt des Kompressionsmaximums, s. Abb. (??)).

Bei aller Einfachheit der Anordnung und einem maximalen Plasmabeta (auf der Achse ist das  $B_\theta$ -Feld = 0, d. h. hier ist das Plasma- $\beta = 1$ ) weist der  $Z$ -Pinch aber einen entscheidenden Nachteil auf: Die  $Z$ -Pinchsäule ist hochgradig instabil! Eine infinitesimale Einschnürung (Anfangsstörung) wächst sehr schnell (Zeitskala  $\mu s$ ) an und führt zum Zerfall der Säule. (Weitere Details werden im nachfolgenden Kapitel erläutert). Damit ist das einfache  $Z$ -Pinch-Gleichgewicht zum Einsatz in einem Fusionsreaktor völlig unbrauchbar. Wegen der nicht beherrschbaren  $Z$ -Pinch-Instabilität und der daraus extrem kurzen Lebensdauer des  $Z$ -Pinch-Plasmas wurde als nächster Kandidat für einen möglichen Fusionsreaktor der lineare  $\Theta$ -Pinch sehr ausgiebig untersucht. Der typische Aufbau einer derartigen  $\Theta$ -Pinch-Anordnung ist im folgenden Schemabild dargestellt:

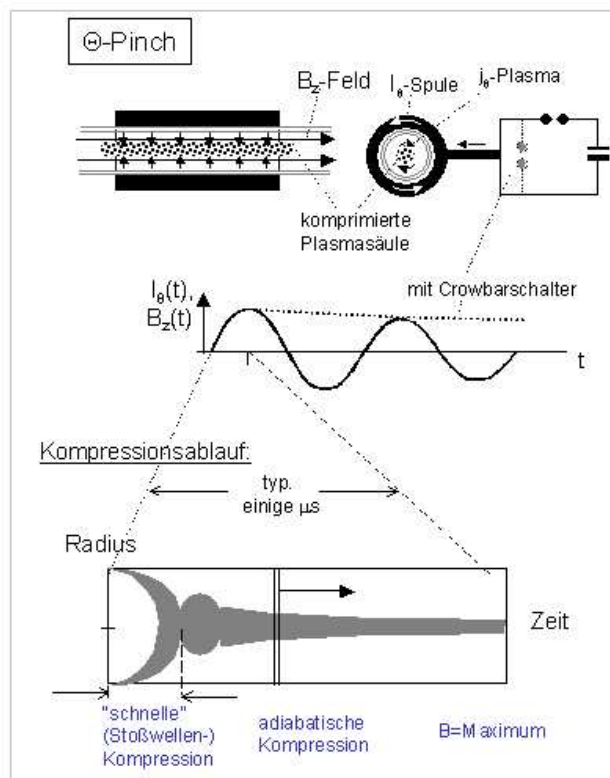


Abbildung 4.15: Schematischer Aufbau eines  $\Theta$ -Pinches.

In diesem Fall wird die Kondensatorbatterie über eine (einwindige) Kompressionsspule entladen, wo der schnell ansteigende  $I_\theta$ -Strom ein  $B_z$ -Feld erzeugt. Zugleich fließt an der Oberfläche des Ausgangsplasmas ein entgegengerichteter  $I_\theta$ -Strom. Die  $j_\theta \times B_z$ -Kraft ist in ihrer Wirkung einem Kolben ("magnetischer Kolben") gleichzusetzen, der das eingefüllte Gas mit Überschallgeschwindigkeit aufammelt und in Richtung Achse komprimiert. Damit der Kolben sofort greift und eine entsprechend scharfe Front ausbildet, wird das Ausgangsgas in der



Regel leicht vorionisiert. Diese erste, "schnelle Kompression" verläuft auf einer Zeitskala von typisch 200-300 Nanosekunden ab und bewirkt eine erste Heizung des Plasmas auf 1-2 keV (10-20 Mio K). Das weiterhin ansteigende Magnetfeld führt zur adiabatischen Weiterkompression der Säule mit entsprechend weiterer Plasmaheizung gemäß isentropischem Adiabaten-gesetz ( $pV^\kappa = \text{const}$ , mit  $\kappa = (f + 2) / f = 2$  für die resultierenden zwei Kompressions-Freiheitsgrade  $\perp B$ ). Der radiale Kompressionsablauf ist im unteren Teil der Abbildung (??) dargestellt (sogenannte "Schmieraufnahme", d. h. dass der Blick durch einen Schlitz, über die Plasmabewegung geschoben wird).

Da die Kondensatorbatterie zusammen mit der Spule zu einer harmonischen Schwingung des Spulenstromes führt, hätte dies eine Serie von Kompressionen und Expansionen zur Folge. Durch Kurzschließen des Spulenstromes im Maximum mittels *Crowbarschaltern* (vgl. Abbil-dung) lässt sich aber ein kontinuierlicher, langsamer Strom- bzw. Feldabfall und eine entspre-chende Verlängerung des Plasmaeinschlusses erzielen. Grosse  $\Theta$ -Pinch-Anlagen wurden mit Kondensatorspeichern mit 40-80 KV Stoßspannung und einem Energieinhalt bis über 2 Mega-joule betrieben. Der Stoßstrom durch die Spule (0,5-8m Länge, ca. 0,2m Durchmesser) erreichte Werte bis über 10 Megaampere und das Magnetfeld (je nach Spulenlänge) bis 20 Tesla.

Durch den schnellen Kompressionsablauf und die entsprechende Aufheizung der einlaufenden Schicht bleibt der Innenbereich praktisch magnetfeldfrei. Im maximalen Kompressionszustand ergibt sich damit ein hochverdichtetes Plasma mit sehr geringem inneren Magnetfeld (Hoch- $\beta$ -Situation), wie nachfolgend dargestellt.

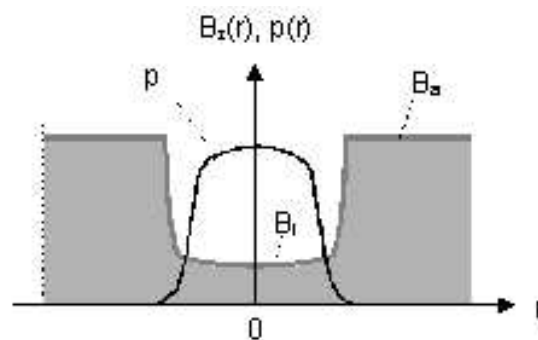


Abbildung 4.16: Radiale Profile von Plasmadruck und Magnetfeld im  $\Theta$ -Pinch.

Dennoch ist eine derartige  $\Theta$ -Pinch-Anordnung praktisch nicht für einen Fusionsreaktor geeig-net. Die wesentlichen Probleme sind:

- Mit Thermalisierung des Plasmas (d. h.  $T_{i\parallel} \rightarrow T_{i\perp}$ ) setzen die Endverluste ein und das Plasma fließt mit thermischer Ionengeschwindigkeit längs dem Magnetfeld aus. Bei noch sinnvollen Längen (z. B. einige Meter) ergeben sich Einschlusszeiten von nicht mehr als  $10\text{-}20 \mu\text{s}^2$ . Bezüglich  $nT\tau_E$  fehlen mehr als 3 Größenordnungen!
- Bei Plasmadichten von typ.  $10^{22}\text{m}^{-3}$  folgt ein starker Energieübertrag von den primär geheizten Ionen auf die Elektronen. Die Parallelwärmeleitung der Elektronen mit  $q \propto T_e^{7/2} / (L/2)$  (Wärmefluss/Fläche) führt zu unzulässig hohen Energieverlusten<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>Beachte: Bei 100eV (= 1 Mio°) bewegen sich  $D^+$ -Ionen mit  $10^5\text{m/s}$ !

<sup>3</sup>Bei z. B. 6keV Ionentemperatur bleibt die Elektronentemperatur praktisch bei ca. 200eV stehen. Der hohe Energietransfer  $P_{ie}$  ergibt dabei eine Energieeinschlusszeit von gleichfalls nur einigen  $10\mu\text{s}$ .

- Das für den schnellen Magnetfeldanstieg benötigte Isolatorgefäß (in den Experimenten wurde meist Quarzglasrohr verwendet) kommt für einen Fusionsreaktor nicht in Betracht, da der hohe Neutronenfluss eine schnelle Zerstörung des Quarzmaterials bedingen würde (Lebensdauer nur in Größenordnung von Stunden).

Die ersten beiden Schwierigkeiten lassen sich offensichtlich dadurch umgehen, dass man die lineare Anordnung zu einem Torus formt. Das dritte Problem war dadurch zu lösen, dass die Magnetfelder sehr langsam (quasi-stationär) aufgebaut werden mussten.

Der für alle weiteren magnetischen Einschlusskonzepte entscheidende Schritt zum Torus soll später näher diskutiert werden. Der langsame Feldaufbau wiederum bedeutete, dass jegliche (schnelle) Kompressionsheizung des Plasmas wegfiel. Dementsprechend mussten leistungsstarke Heizverfahren entwickelt werden, um das toroidale Plasma nach Aufbau (Zündung) einer Niedertemperaturentladung langsam bis in den Bereich von Fusionstemperaturen zu überführen. Die jetzt verfügbaren Methoden (Wellenheizung, Teilcheninjektion im Bereich von mehreren 10 Megawatt) werden im Kapitel “*Plasmaheizung*” ausführlicher erläutert.

### **Zusammenfassung: Magnetischer Einschluss**

Der Einschluss (Druckbilanz) eines heißen Plasmas wird bestimmt durch die Allgemeine Gleichgewichtsgleichung  $j \times B = \nabla p$ . Die sich daraus ergebenden einfachsten Gleichgewichte sind:

- $\Theta$ -Pinch mit Stromdichte in  $\Theta$ -Richtung und Magnetfeld in Z-Richtung
- Z-Pinch mit Stromdichte in z-Richtung und (ringförmigem) Magnetfeld in  $\Theta$ -Richtung

Dabei fließt der erforderliche Gleichgewichtsstrom (obwohl senkrecht zu B) mit der hohen Plasmaleitfähigkeit. Grund: Mit Dichte- und/oder Temperaturgradient im Magnetfeld ist inhärent ein Strom verbunden durch Nettoeffekt bei der Gyrationbewegung. Der Strom selbst fließt in diamagnetischer Richtung, d. h. er reduziert das Magnetfeld im Plasma.

**$\Theta$ -Pinch:** Das Gleichgewicht lässt sich über den magnetischen Druck beschreiben:  $p + B^2/2\mu_0 = B_0^2/2\mu_0$ . ( $B_0$  das äußere Magnetfeld). Der  $\beta$ -Wert ( $\beta = p / (B_0^2/2\mu_0)$ ) kann von  $\sim 0$  bis 1 variieren. Bei maximalem  $\beta$  (100%) ist das Magnetfeld im Plasma  $=0$ .

**Z-Pinch:** In diesem Fall ist das Magnetfeld inhomogen ( $1/r$ -Abfall im Außenraum) und damit das Gleichgewicht etwas komplizierter. Man erhält hier die Bennett-Formel mit:  $Nk_B T = \mu_0/8\pi \cdot I_0$ .

**Screwpinch, Reversed-Field-Pinch:** Gleichgewichte mit kombiniertem  $B_z/B_\Theta$ -Feld. Gesamtmagnetfeld daher schraubenförmig! Zu beachten: Es können sowohl beide Feldkomponenten zum Einschluss beitragen, es kann aber auch ein Feld das andere komprimieren. Plasmadruck dann entsprechend reduziert. RFP: Richtungsumkehr des  $B_z$ -Feldes!

Sogenannte “Hoch-Beta-Gleichgewichte” wurden in der Anfangszeit der Fusionsforschung untersucht (erzeugt mit Stoßwellenheizung und weiterer Kompression). Der Z-Pinch (= lineare Plasmasäule mit Z-Strom und  $\Theta$ -Magnetfeld, dieses auf der Achse  $= 0$ , daher hier  $\beta = 1!$ ) ist hochgradig instabil. Der  $\Theta$ -Pinch (= lineare Plasmasäule mit  $\Theta$ -Strom in  $B_z$ -Feld) fließt in kurzer Zeit über die offenen Enden aus. (Zugleich werden die Elektronen aufgrund der hohen parallelen Wärmeleitung sofort auf kleine Temperaturen heruntergekühlt).

# Kapitel 5

## Stabilität von MHD-Gleichgewichten

Im vorherigen Kapitel haben wir MHD-Gleichgewichte berechnet. Wir fanden so Konfigurationen, bei denen sich das Plasma im Kräftegleichgewicht befindet. Es wurde jedoch keine Aussage bezüglich der Stabilität der Konfiguration gemacht. Diese ist durch die Antwort des Systems auf eine infinitesimale Störung bestimmt. Die Situation ist analog einer Kugel in einem Potentialtopf (siehe Abbildung). An Stellen mit  $dV/dx = -F = 0$  ist das System im Kräftegleichgewicht, bei einer kleinen Verschiebung kann die entstehende Kraft jedoch sowohl rücktreibend sein (Stabilität) oder die anfängliche Auslenkung verstärken (Instabilität). Die folgende Abbildung demonstriert auch das Konzept der nichtlinearen Stabilität bzw. Instabilität: Hier hängt das Verhalten von der Größe der Anfangsstörung ab.

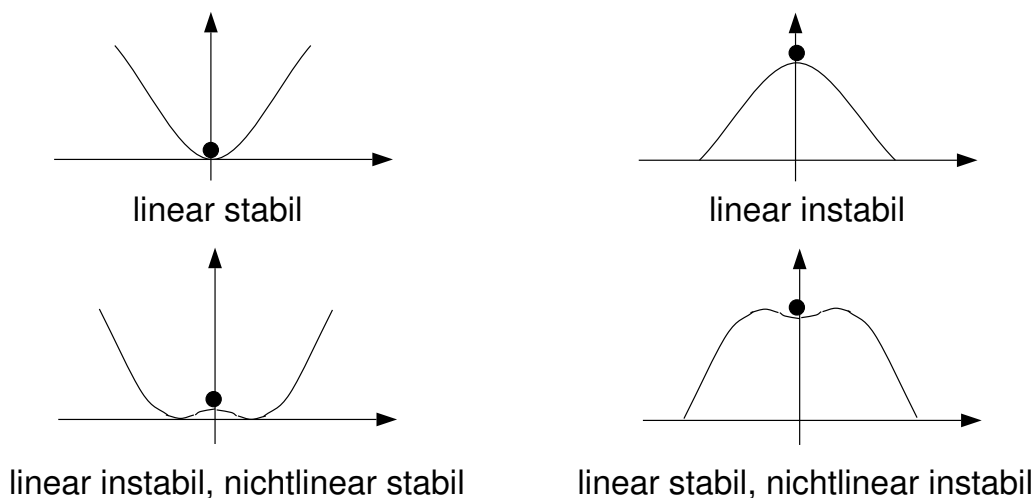


Abbildung 5.1: Zum Konzept der linearen und nichtlinearen Stabilität.

Wir haben uns bereits früher mit der Frage nach der Reaktion eines Gleichgewichts auf kleine Störungen beschäftigt. Im Kapitel "Magnetohydrodynamik" haben wir gefunden, dass für ein homogenes Plasma ( $\nabla p = 0, j_0 = 0$ ) Auslenkung aus dem Gleichgewicht zur Anregung von Wellen (im MHD-Bild: Alfvén-Wellen) führt. Bei der Diskussion der Trägheitsfusion haben wir gefunden, dass eine Rayleigh-Taylor-Instabilität bei nicht ausreichend homogener Bestrahlung des Pellets auftritt. Wir wollen uns im Folgenden mit der Stabilitätsanalyse von MHD-Gleichgewichten beschäftigen. Dazu gehen wir natürlich von den bereits abgeleiteten MHD-Gleichungen aus. Eine Möglichkeit der linearen Stabilitätsanalyse, die Lösung des entsprechenden Eigenwertproblems haben wir bereits im Kapitel "Magnetohydrodynamik" im 1. Semester diskutiert. Dabei wurden die MHD-Gleichungen linearisiert. Mit der Einführung

des Verschiebungsvektors  $\vec{\xi}$ , der die Verschiebung eines Flüssigkeitselements aus der Ruhelage kennzeichnet, findet man die Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F}(\vec{\xi})$$

mit dem Kraftoperator  $\vec{F}(\vec{\xi})$ . Eine Fouriertransformation  $f(\vec{x}, t) = f(\vec{x}) e^{-i\omega t}$  führt dann auf das Eigenwertproblem

$$-\omega^2 \rho_0 \vec{\xi} = \vec{F}(\vec{\xi})$$

In der idealen MHD lässt sich zeigen, dass der Kraftoperator  $\vec{F}$  hermitesch ist. Somit sind die Eigenwerte  $\omega^2$  reell und wir erhalten als Stabilitätskriterium

- $\omega^2 > 0$ : Dann ist  $\omega$  reell und nach obiger Gleichung führt das System Oszillationen um die Ruhelage aus. Dieser Fall entspricht der Stabilität.
- $\omega^2 < 0$ : Dann ist  $\omega$  imaginär, es existiert eine exponentiell anwachsende Lösung. Dieser Fall entspricht der Instabilität.

Mit der Eigenwertgleichung können also prinzipiell Eigenfunktionen und Anwachsraten bestimmt werden.

Wir wollen hier jedoch einen etwas anschaulicheren Zugang wählen: das Energieprinzip. Im Rahmen der idealen MHD ist die Energie des betrachteten Systems erhalten und man kann ein stabiles Gleichgewicht finden aus dem Minimum der potentiellen Energie. Wir wollen im Folgenden ein stationäres Gleichgewicht betrachten ( $v_0 = 0$ ). Dann findet man kinetische Energie nicht im Gleichgewicht, sondern nur in der Störung. Damit lässt sich die kinetische Energie mit der Zeitableitung des Verschiebungsvektors schreiben

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \int \rho_0 \dot{\xi}^* \dot{\xi} d\vec{r}.$$

Mit einem Fourieransatz für die Störung findet man

$$W_{kin} = -\frac{\omega^2}{2} \int \rho_0 \xi^2 d\vec{r} = -\frac{\omega^2}{2} K(\xi, \xi).$$

Mit der oben angegebenen Eigenwertgleichung kann man den Ausdruck umschreiben und findet für die kinetische Energie:

$$W_{kin} = -\frac{\omega^2}{2} K(\xi, \xi) = \frac{1}{2} \int \xi^* F(\xi) d\vec{r}.$$

Wegen der Energieerhaltung ist im dissipationsfreien System die kinetische Energie (der Störung) gleich der Änderung der potentiellen Energie infolge der Störung des Gleichgewichts. Die rechte Seite der obigen Gleichung kann auch anschaulich als Änderung der potentiellen Energie (Kraft  $\vec{F}(\vec{\xi})$  und Weg  $\vec{\xi}$ ) gedeutet werden. Die Stabilität des MHD-Gleichgewichts ist also zu diskutieren an Hand des Energieprinzips

$$\delta W_{pot} = -W_{kin} = \frac{\omega^2}{2} K(\xi, \xi).$$

Da  $K(\xi, \xi)$  positiv definit ist, folgt aus

$$\delta W_{pot} > 0 \rightarrow \omega^2 > 0 \rightarrow \text{Stabilität (oszillierende Lösung)}$$

$\delta W_{pot} < 0 \rightarrow \omega^2 < 0 \rightarrow$  Instabilität (exponentiell anwachsende Lösung).

Man erhält also das anschauliche Ergebnis: führt die Störung zur Absenkung der potentiellen Energie, so ist das System instabil, im anderen Fall liegt Stabilität vor. Die Verhältnisse sind also analog dem Teilchen im Potential.

Der Ausdruck für  $\delta W$  kann noch in eine intuitiv einsichtige Form gebracht werden. Dazu teilt man das Integrationsgebiet in den Bereich des Plasmas (Index  $F$  für "Fluid"), den des Vakuums (Index  $V$ ) und die Grenzfläche (Index  $S$  für "Surface") auf. Dann schreibt sich  $\delta W$  als

$$\delta W = \delta W_F + \delta W_S + \delta W_V. \quad (5.1)$$

Die einzelnen Beiträge ergeben sich zu

$$\delta W_V = \frac{1}{2} \int_{Vak.} \frac{B_1^2}{2\mu_0} dV. \quad (5.2)$$

Der Vakuumbeitrag besteht also nur aus der magnetischen Feldenergie und ist immer positiv, d. h. stabilisierend. Die Kompression des Vakuumfeldes erfordert Energie.

Der Oberflächenterm lautet

$$\delta W_S = \frac{1}{2} \int_{surf.} (\vec{n} \cdot \vec{\xi}_\perp)^2 \vec{n} \|\nabla \left( p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) \| d\vec{S}, \quad (5.3)$$

wobei  $\vec{n}$  den Normalenvektor darstellt und der Doppelstrich den Sprung der Größe an der Grenzfläche bezeichnet. Ein nicht verschwindender Sprung der Summe von kinetischem und magnetischem Druck bedingt einen Flächenstrom; schließen wir Fälle mit Oberflächenströmen aus, so gilt  $\delta W_S = 0$ . Der Index  $\perp$  bezieht sich hier und im Folgenden auf das Gleichgewichtsmagnetfeld. Der letzte Term (Volumenbeitrag des Plasmas) lautet

$$\begin{aligned} \delta W_F = \frac{1}{2} \int_{Fluid} & \left( \frac{B_{1\perp}^2}{\mu_0} + \frac{B_{0\perp}^2}{\mu_0} (\nabla \cdot \vec{\xi}_{1\perp} + 2\vec{\xi}_{1\perp} \cdot \vec{\kappa})^2 + \gamma p_0 (\nabla \cdot \vec{\xi})^2 - 2 (\vec{\xi}_\perp \cdot \nabla p_0) (\vec{\kappa} \cdot \vec{\xi}_\perp) \right. \\ & \left. - \frac{j_\parallel}{B_0} (\vec{\xi}_\perp \times \vec{B}_0) \cdot \vec{B}_1 \right) dV, \end{aligned} \quad (5.4)$$

wobei  $\vec{\kappa} = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0 / B_0$  der Krümmungsvektor des Gleichgewichtsmagnetfeldes ist.

Die Terme in der ersten Zeile von (5.4) sind alle drei positiv definit; sie haben daher stabilisierende Wirkung. Im Einzelnen bedeuten sie (von links nach rechts) die mit der Auslenkung des Vakuumfeldes verbundene Energie (torsionale Alfvén-Wellen), die mit der Kompression des Magnetfeldes verbundene Energie (kompressionale Alfvén-Welle) sowie die mit der Kompression des Plasmas verbundene Änderung der inneren Energie des Gases (Schallwellen). Die Terme in der zweiten Zeile von (5.4) können sowohl positiv als auch negativ sein; sie entscheiden daher über die Stabilität des Systems. Diese beiden Terme sind von unterschiedlicher physikalischer Bedeutung, sie stellen die grundsätzlichen Quellen für MHD-Instabilitäten in Fusionsplasmen dar:

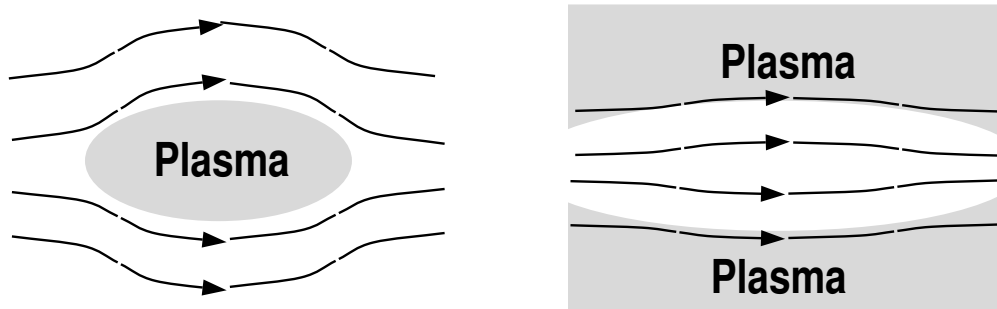


Abbildung 5.2: Austauschinstabilität im magnetischen Spiegel: ein Austausch von Plasma und Feldlinien führt im Bereich ungünstiger Krümmung zur Absenkung sowohl magnetischer als auch innerer Energie des Plasmas.

- Druckgetriebene Instabilitäten: der Term  $-2 (\vec{\xi}_{\perp} \cdot \nabla p_0) (\vec{\kappa} \cdot \vec{\xi}_{\perp})$  beschreibt die destabilisierende Wirkung des Gradienten des kinetischen Drucks. Wie man sieht, ist der Beitrag negativ, wenn Krümmungsvektor und Druckgradient parallel sind. Sind dagegen  $\vec{\kappa}$  und  $\nabla p$  antiparallel, so ist der Beitrag positiv. Ein Beispiel für eine Anordnung, die vorwiegend ungünstige Krümmung besitzt, ist der magnetische Spiegel. Wie in Abb. ?? gezeigt, kann durch Austausch von Plasma und Feldlinien sowohl die Feldenergie abgesenkt werden (Verkürzung von Magnetfeldlinien) als auch die innere Energie des Plasmas verringert werden (Expansion des Plasmas). Diese sog. *Austauschinstabilität* (engl. *interchange*) führt in einer einfachen Spiegelanordnung wie in Abb. 5.2 zum schnellen Verlust des Plasmas.
- Stromgetriebene Instabilitäten: der Term  $-\frac{j_{\parallel}}{B_0} (\vec{\xi}_{\perp} \times \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1)$  beschreibt Instabilitäten, welche vom Parallelstrom herrühren. Ein Beispiel ist die sogenannte Kink-Instabilität, welche auch in einem dünnen, von Strom durchflossenen geraden Draht beobachtbar ist: Mit zunehmender Stromstärke knickt der Draht unter Verringerung seiner Gesamtenergie wie in Abb. 5.3 gezeigt ein (diese Situation tritt auch beim Auswringen eines Handtuchs auf).

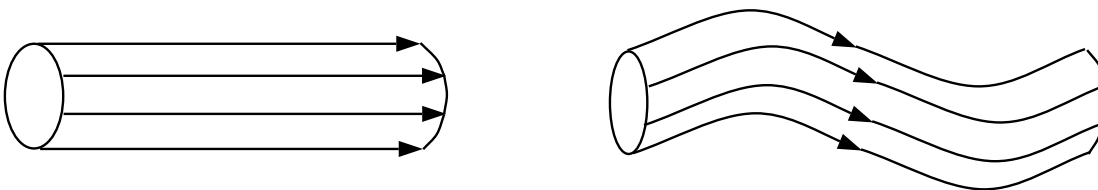


Abbildung 5.3: Kinkinstabilität eines stromdurchflossenen Leiters.

Wir haben die Instabilitäten nach der dominanten freien Energie klassifiziert; in der Praxis tritt häufig eine Mischung beider Arten auf und die Instabilität kann nur näherungsweise einer der beiden Klassen zugeordnet werden.

Wir wollen im Folgenden das Energieprinzip anwenden auf die linearen Einschlusskonfigurationen, die wir im vorigen Kapitel diskutiert haben. Mit Hilfe des Energieprinzips können wir feststellen, dass ein Gleichgewicht instabil ist sobald wir irgendeine Auslenkung  $\vec{\xi}$  aus der

Gleichgewichtslage gefunden haben, für die die Änderung der potentiellen Energie negativ ist. Umgekehrt kann man mit Hilfe des Energieprinzips nur schwer Stabilität eines Gleichgewichts beweisen, weil man ja zeigen müsste, dass für alle möglichen Testfunktionen  $\vec{\xi}_\perp \delta W_{pot} > 0$  ist. Wir wollen im Folgenden zunächst den Z-Pinch betrachten. Wegen der Zylindersymmetrie können wir eine Fourier-Zerlegung für den Verschiebungsvektor machen

$$\vec{\xi}(\vec{r}) = \vec{\xi}(r) e^{i(m\theta + kz)}.$$

Im Z-Pinch gibt es keinen Gleichgewichtsstrom parallel zu den Magnetfeldlinien, sodass es keine stromgetriebenen Instabilitäten geben kann (der Term proportional zu  $j_\parallel$  im Energieprinzip verschwindet).

Mit den Maxwell-Gleichungen und dem idealen Ohmschen Gesetz kann man das gestörte Magnetfeld schreiben (siehe Kapitel "Magnetohydrodynamik") als

$$\vec{B}_1 = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) = \frac{im}{r} (\xi_r \vec{e}_r + \xi_z \vec{e}_z) B_\Theta.$$

Die rechte Seite ergibt sich aus dem Fourier-Ansatz für den Verschiebungsvektor. Die Feldlinienkrümmung erhält man zu

$$\vec{\kappa} = \frac{\nabla B}{B} = -\frac{\vec{e}_r}{r}.$$

Wir wollen uns zunächst auf Störungen mit  $m = 0$  beschränken (d. h. keine Winkelabhängigkeit der Störung). Dann gibt es kein Störfeld  $B_1$  senkrecht zum Gleichgewichtsfeld. Für das Energieprinzip findet man folgenden Ausdruck

$$\frac{\delta W_{pl}}{2\pi R_0} = \frac{\pi}{\mu_0} \int_0^a r dr \left\{ B_0^2 \left| \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp - 2 \frac{\xi_r}{r} \right|^2 + \gamma p_0 \left| \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp \right|^2 + \frac{2p'_0 \mu_0}{r} |\xi_r|^2 \right\}.$$

Der erste Term beschreibt die stabilisierende Wirkung der Kompression (Kompression von Plasma und Magnetfeld erfordert Energie). Allerdings ist die Magnetfeldkrümmung destabilisierend. Der Druckgradient ( $p' < 0!$ ) ist wegen  $\vec{\kappa} \uparrow \nabla p_0$  auch destabilisierend. Es gilt nun, eine Testfunktion zu finden, für die die Änderung der potentiellen Energie minimal wird. Dazu minimieren wir das Energiefunktional bezüglich  $\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp$ :

$$\frac{\partial \delta W_{pl}}{\partial \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp} = 0.$$

Man erhält:

$$\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp = \frac{2B_\Theta^2/\mu_0}{\gamma p_0 + B_\Theta^2/\mu_0} \frac{\xi_r}{r}.$$

Einsetzen in das Energiefunktional liefert

$$\frac{\delta W_{pl}}{2\pi R_0} = \pi \int_0^a r dr \left[ \frac{4\gamma p_0 B_0^2/\mu_0}{\gamma p_0 + B_0^2/\mu_0} + 2rp'_0 \right] \frac{|\xi_r|^2}{r^2}.$$

Daraus folgt als Forderung für die Stabilität

$$\frac{4\gamma p_0 B_0^2/\mu_0}{\gamma p_0 + B_0^2/\mu_0} + 2rp'_0 > 0,$$

was im Allgemeinen nicht erfüllt ist. So sind beispielsweise die sogenannten Benett-Profile (in Abb. ?? gezeigt) für  $\gamma = 5/3$  (ideales Gas) instabil. Der Z-Pinch ist also meist instabil gegen Störungen mit  $m = 0$ . Es tritt dann die sogenannte Würstchen-Instabilität auf, die in Abb. ?? schematisch dargestellt ist.

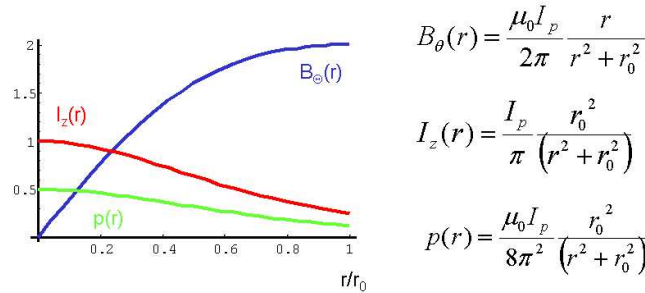


Abbildung 5.4: Beispiel für Profile von Druck und Magnetfeld (Bennet-Profile), die gegen eine  $m = 0$ -Störung instabil sind.

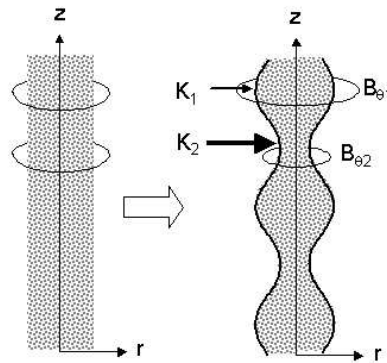


Abbildung 5.5: Schematische Darstellung der sogenannten Würstchen-Instabilität.

Nimmt man eine lokale Einschnürung der Plasmasäule als (infinitesimal kleine) Anfangsstörung  $\delta_r$  an, so wird an dieser Stelle das  $B_\Theta$ -Magnetfeld proportional zu  $\sim \frac{1}{r-\delta r}$  ansteigen, der Magnetfelddruck quadratisch in  $B_\Theta$ . Damit wird durch die Wirkung des ansteigenden Magnetfeld-drucks eine kleine Anfangsstörung verstärkt.

Für Störungen  $\vec{\xi}$ , die nicht unabhängig vom Winkel  $\Theta$  sind ( $m > 0$ ) gehen wir wieder vom allgemeinem Energieprinzip aus. Zunächst wollen wir wieder die mit der Plasmakompression verbundene Energie betrachten, also den Term proportional zu

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + \frac{im}{r} \xi_\Theta + ik \xi_z.$$

Während für den Fall  $m = 0$  nur Verschiebungen senkrecht zum Gleichgewichtsfeld auftreten (und daher nur  $\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp$  auftritt), kann nun  $\xi_\Theta$  so gewählt werden, dass  $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$  ist (da es darum geht, Testfunktionen zu finden, die  $\delta W_{pol}$  minimieren). Man findet

$$\xi_\Theta = \frac{i}{m} \left[ (r \xi_r)' + ikr \xi_z \right]$$



und damit

$$\delta W_{pl} = 2\pi^2 R_0 \int_0^a r dr \left[ \frac{m^2 B_\Theta^2}{r^2 \mu_0} (|\xi_r|^2 + |\xi_z|^2) + B_{\Theta^2} \left| r \left( \frac{\xi_r}{r} \right)' + ik\xi_z \right|^2 + \frac{2p_0'}{r} |\xi_r|^2 \right].$$

Wir minimieren diesen Ausdruck bezüglich  $\xi_z^*$  und erhalten  $\xi_z = \frac{ikr^3}{m^2 + k^2 r^2} \left( \frac{\xi_r}{r} \right)'$ , womit

$$\frac{\delta W_{pl}}{2\pi R_0} = \frac{\pi}{\mu_0} \int_0^a r dr \left\{ [2\mu_0 r p_0' + m^2 B_\Theta^2] \frac{|\xi_r|^2}{r^2} + \frac{m^2 r^2 B_\Theta^2}{m^2 + k^2 r^2} \left| \left( \frac{\xi_r}{r} \right)' \right|^2 \right\}$$

folgt. Dieser Ausdruck wird minimal für  $k \rightarrow \infty$  (dann verschwindet der letzte Term). Damit folgt als notwendige und hinreichende Bedingung für Stabilität

$$2r \frac{dp}{dr} + \frac{m^2 B_\Theta^2}{\mu_0} > 0$$

(Wäre dieser Ausdruck für irgendeinen Radius  $r$  kleiner als Null, könnte man eine Testfunktion so wählen, dass sie gerade in diesem Bereich endlich ist und überall sonst verschwindet, was  $\delta W_{pot} < 0$  zur Folge hätte). Unter Nutzung der Gleichgewichtsbedingung für den Z-Pinch

$$\frac{dp}{dr} + \frac{B_\Theta}{\mu_0 r} \frac{d}{dr} (r B_\Theta) = 0$$

lässt sich die Stabilitätsbedingung umschreiben zu

$$\frac{r^2}{B_0} \left( \frac{B_0}{r} \right)' < \frac{1}{2} (m^2 - 4).$$

Der linke Ausdruck hängt über

$$\frac{B_0}{r} = \frac{\mu_0}{2} \langle j \rangle$$

mit dem radialen Gradienten der Gleichgewichtsstromdichte zusammen. Wenn die Stromdichte nach außen abfällt, ist der Z-Pinch stabil für  $m > 2$ . Üblicherweise ist die Stromdichte im Plasmazentrum allerdings fast konstant, sodass dort auch Störungen mit  $m = 1$  instabil sind.

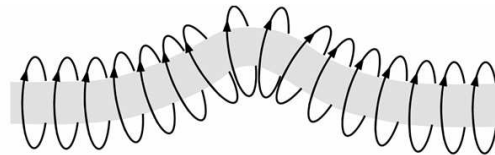


Abbildung 5.6: Schematische Darstellung der  $m = 1$  (kink-Instabilität).

Wenn wir also eine kleine Anfangsstörung wie in der Abbildung betrachten, dann ist im Bereich der Störung das Magnetfeld unterhalb der Plasmasäule verstärkt, dadurch wird dort der Magnetfelddruck stärker und das Plasma wird noch weiter nach oben gedrückt; die anfängliche kleine Deformation also verstärkt. Die hier beschriebenen Instabilitäten sind in Z-Pinchen

experimentell beobachtet worden und haben die Lebensdauer dieser Plasmen auf einige  $10^{-6}$  s beschränkt. Sie lassen sich vermeiden durch eine Kombination von Z- und  $\Theta$ -Pinch, wie in Abb. ?? demonstriert.

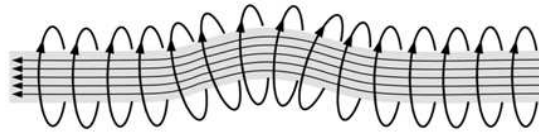


Abbildung 5.7: Überlagerung des Magnetfeldes des Z-Pinches mit einem Magnetfeld in z-Richtung.

Hierbei wird zusätzlich zu dem vom Plasmastrom erzeugten  $B_\Theta$ -Feld ein Feld in Z-Richtung überlagert. Dieses Feld wirkt nun der Einschnürung (die einer Kompression des  $B_z$ -Feldes entspricht) und der Verbiegung der Plasmasäule (Auslenkung des  $B_z$ -Feldes, Feldlinienspannung!) entgegen.

Die entstehende Magnetfeldgeometrie ist der sogenannte Screw-Pinch.

Im Screw-Pinch führt die Addition von  $B_\Theta$  und  $B_z$  zu helikal verschraubten Feldlinien. Eine solche Konfiguration ist in Abbildung ?? dargestellt.

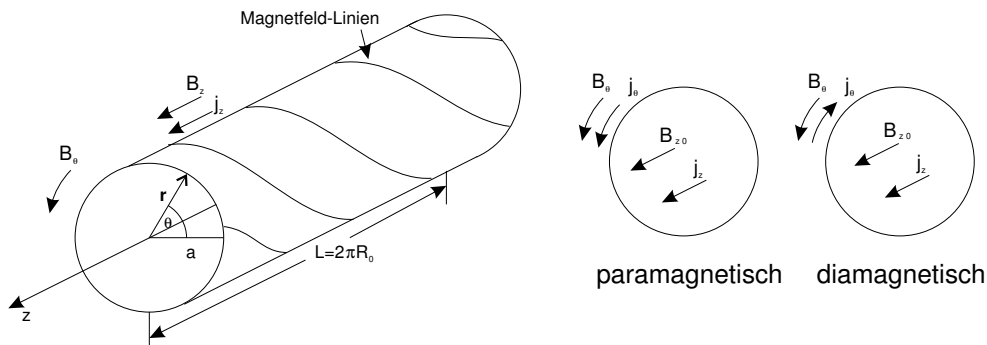


Abbildung 5.8: Schematische Anordnung des Screw-Pinches (links) und Darstellung der zur radialen Kraftbilanz beitragenden Ströme.

Das extern erzeugte Feld  $B_z$  muss ausreichend groß sein, um die Stabilität zu gewährleisten. Die Berechnung des MHD-Gleichgewichtes für den Screw-Pinch erfolgt analog zum Z-Pinch. Im Ampereschen Gesetz müssen nun die Felder  $B_\Theta$  und  $B_z$  berücksichtigt werden:

$$-\frac{1}{\mu_0} \frac{dB_z}{dr} = j_\theta \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{\mu_0 r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) = j_z. \quad (5.6)$$

Das axiale Magnetfeld  $B_z$  setzt sich somit aus dem extern erzeugten Magnetfeld  $B_{z0} = const$  und dem im Plasma durch  $j_\theta$  erzeugten Magnetfeld zusammen. Einsetzen des Magnetfeldes in die Kraftgleichung liefert nun

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{d}{dr} \left( \frac{B_\theta^2 + B_z^2}{2\mu_0} \right) - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}. \quad (5.7)$$

Im Experiment sind der extern erzeugte Anteil  $B_{z0}$  und  $j_z$  vorgegeben. Der im Plasma fließende Strom  $j_\theta$  kann über  $j_\theta B_z$  zur Kraftbilanz beitragen. Dieser Strom und der damit verbundene Beitrag zum axialen Feld  $B_z$  ist jedoch nicht direkt experimentell vorgegeben. Daher ist  $p$  eine freie Größe. Wir haben also durch die Addition des axialen Feldes einen weiteren Freiheitsgrad gewonnen. Damit kann im Experiment bei festem  $I_p$  der Druck variiert werden (z. B. durch die dem Plasma zugeführte Heizleistung). Je nach Größe des Druckes variiert das Vorzeichen von  $j_\theta$ :

- Ist der Druckgradient kleiner als der durch  $j_z B_\theta$  vorgegebene Wert, so ist  $j_\theta B_z$  antiparallel zu  $j_z B_\theta$ . Die Effizienz des Einschlusses ist dann kleiner als im Z-Pinch, d. h.  $\beta_\theta < 1$ . Wie in der Abbildung dargestellt, ist das von  $j_\theta$  erzeugte Feld dann dem externen Feld  $B_z(0)$  parallel, d. h. das Plasma reagiert *paramagnetisch*.
- Ist der Druckgradient größer als der durch  $j_z B_\theta$  vorgegebene Wert, so ist  $j_\theta B_z$  parallel zu  $j_z B_\theta$ . Die Effizienz des Einschlusses ist dann größer als im Z-Pinch, d. h.  $\beta_\theta > 1$ . In diesem Fall reagiert das Plasma *diamagnetisch*.

Man beachte aber, dass nur der durch den poloidalen Plasmastrom erzeugte Anteil von  $B_z$  zum Einschluss beiträgt, während der konstante externe Anteil in der Druckbilanz nicht vorkommt.

Bisher haben wir ideale MHD Störungen untersucht, bei denen die Bewegung des Plasmas flusserhaltend erfolgte. Im Gegensatz dazu kann unter Berücksichtigung der Leitfähigkeit im Ohmschen Gesetz auch Fluss erzeugt oder vernichtet werden. Dadurch kann sich die Topologie der Flussflächenstruktur ändern. Die resistive MHD erlaubt also eine neue Klasse von Instabilitäten, die in der idealen MHD nicht zugänglich ist.

Aus dem Ohmschen Gesetz mit endlicher Resistivität folgt mit dem Faradayschen Gesetz

$$\begin{aligned} \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} &= \eta \vec{j} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E} = -\eta \nabla \times \vec{j} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{B} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

eine Änderung des Magnetfeldes durch einen Plasmastrom bei endlicher Resistivität. Diese Gleichung hat die Form einer Diffusionsgleichung für das Magnetfeld mit Diffusionskoeffizient  $D_{mag} = 1/(\mu_0 \sigma)$ . Daraus können wir eine charakteristische Zeit erhalten, indem wir Diffusion über eine charakteristische Länge (z. B. den kleinen Plasmaradius  $a$ ) betrachten:

$$\tau_R = \mu_0 \sigma a^2 \quad (5.8)$$

Der Fluss im Plasma ändert sich also auf der Zeitskala  $\tau_R$ ; auf kleineren Zeitskalen gilt Fluss-erhaltung und damit die ideale MHD. Für heiße Plasmen ist  $\tau_R$  viel länger als die Alfvénzeit-skala: während  $\tau_A$  für  $B = 2T$  und  $n = 10^{20} m^{-3}$  für ein Wasserstoffplasma bei  $a = 0.5m$  bei

$0.1\mu s$  liegt, erhalten wir für  $T = 1$  keV und unter Verwendung der Spitzerleitfähigkeit  $D_{mag} \approx 0.02m^2/s$  und somit  $\tau_R = 12.5s$ . Damit scheint zunächst die Berücksichtigung resistiver Instabilitäten nicht notwendig. Es gibt jedoch eine Klasse von resistiven MHD-Instabilitäten, bei denen sich das Plasma im wesentlichen ideal verhält, in einem kleinen Bereich des Plasmas jedoch aufgrund der endlichen Leitfähigkeit Fluss erzeugt oder vernichtet. Solche Instabilitäten sind in der idealen MHD nicht enthalten. Bei Berücksichtigung endlicher Resistivität erhält man die sogenannten *Tearing Moden* als resistives Analogon zum idealen Kink.

# Kapitel 6

## Der toroidale Einschluss von Plasmen

Im vorigen Kapitel hatten wir gefunden, dass der Screw-Pinch im Gegensatz zu den beiden anderen untersuchten Konfigurationen (Z-Pinch,  $\Theta$ -Pinch) die besten Stabilitätseigenschaften hat. Allerdings bleibt beim Screw-Pinch das wesentliche Problem linearer Konfigurationen bestehen: die offenen Feldlinien. Die Teilchen können das Plasma entlang von Magnetfeldlinien verlassen.

Ein Konzept zur Vermeidung der Endverluste ist die Anordnung in torusförmiger Geometrie. Hier treten keine Endverluste auf, und der Energietransport aus dem Plasma ist durch die Transportkoeffizienten senkrecht zum Magnetfeld bestimmt. Wie in Teil 1 der Vorlesung ausgeführt (Kapitel "Teilchenbewegung in elektrischen und magnetischen Feldern"), ist jedoch der Einschluss in einem reinen Toroidalfeld aufgrund der Torusdriften (Ladungstrennung durch  $\vec{B} \times \nabla B$ -Drift und Auswärtstransport durch die  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift im entstehenden  $\vec{E}$ -Feld) nicht möglich. Man benötigt zusätzlich ein Poloidalfeld, welches kraftfreie Ströme längs der Feldlinien zum Ausgleich der Potentialunterschiede ermöglicht und somit keine nennenswerte  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift zulässt.

Diese Ströme sind die sogenannten Pfirsch-Schlüter-Ströme.

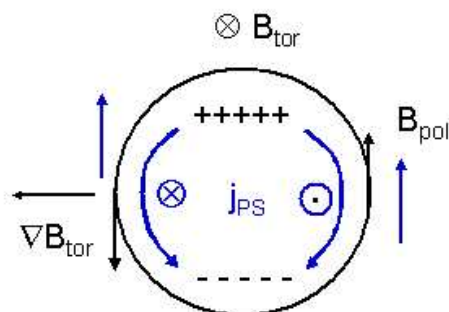


Abbildung 6.1: Pfirsch-Schlüter-Ströme schwächen das Magnetfeld auf der Innenseite und stärken es auf der Außenseite.

Wie aus obiger Abbildung ersichtlich, schwächen sie das durch den Plasmastrom erzeugte poloidale Magnetfeld auf der Innenseite des Torus und stärken es auf der Außenseite. Auf diese Wirkung der Pfirsch-Schlüter-Ströme kommen wir später noch einmal zurück.

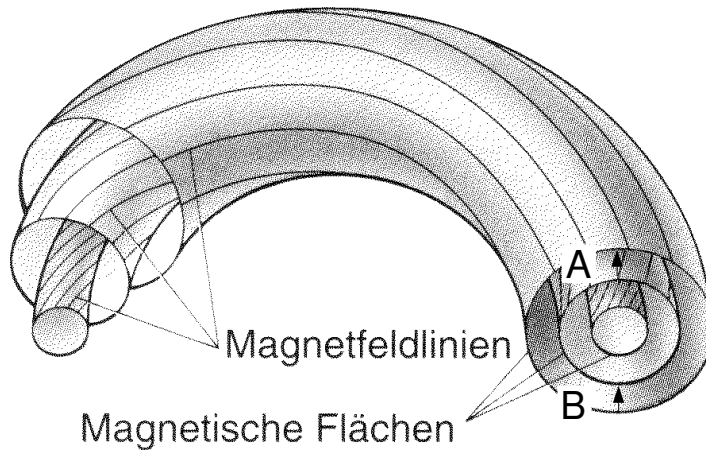


Abbildung 6.2: Magnetische Flächen auf einem Torus.

In einer solchen toroidalen Anordnung vollführen die Feldlinien helikale Umläufe um den Torus und spannen so im Idealfall ineinandergeschachtelte magnetische Flächen auf (siehe Abbildung ??). Wegen  $\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$  gilt  $\vec{j} \cdot \nabla p = \vec{B} \cdot \nabla p = 0$ , d. h. der Druck ist auf den magnetischen Flächen konstant. Zusätzlich erkennt man, dass auch die Stromfeldlinien in der magnetischen Fläche liegen.

Im Rahmen eines MHD-Bildes erhält man die oben erwähnten Pfirsch-Schlüter-Ströme aus der Forderung der Divergenzfreiheit des Stromes

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (6.1)$$

(die eine direkte Folge der Quasineutralität ist,  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ). Wegen  $\vec{j}_\perp \times \vec{B} = \vec{\nabla} p$  muss das Produkt aus  $B$  und  $j_\perp$  konstant auf einer magnetischen Fläche sein. Allerdings fällt das toroidale Magnetfeld  $B_\phi \sim 1/R$  nach außen ab. Wegen  $|B_\phi^{au\beta en}| < |B_\phi^{innen}|$  folgt daher  $|j_\perp^{au\beta en}| > |j_\perp^{innen}|$ . Der Senkrechtstrom hat also eine endliche Divergenz, weshalb nach  $\nabla \cdot \vec{j}_\perp = -\nabla \cdot \vec{j}_\parallel$  ein Parallelstrom fließen muss. In einer einfachen Geometrie (kreisförmiger Plasmaquerschnitt und großes Aspektverhältnis:  $A = R/a$  mit  $R$ : großer Torus-Radius,  $a$ : kleiner Torus-Radius) findet man für diesen Parallelstrom

$$j_{PS} = \frac{2 \cos \vartheta q}{B_\phi} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (6.2)$$

Die Geometrie einer Feldlinie in einer solchen Anordnung wird durch den sogenannten Sicherheitsfaktor  $q$  beschrieben:

$$q = \frac{\text{Anzahl der toroidalen Umläufe}}{\text{Anzahl der poloidalen Umläufe}} \quad (6.3)$$

einer Feldlinie auf dem Torus. So schließt sich z. B. eine Feldlinie auf der  $q = 1$  Fläche nach einem toroidalen Umlauf in sich selbst; eine Feldlinie auf der  $q = 2$  Fläche benötigt hierzu zwei Umläufe. Der Sicherheitsfaktor berechnet sich aus dem Quotienten der Winkeländerung in toroidaler Richtung,  $\Delta\phi$ , und der in poloidaler Richtung  $\Delta\theta$  längs der Feldlinie. In

der Näherung konstanter Felder  $B_\theta$  und  $B_\phi$  ergibt sich dann aus der Gleichung der Feldlinie  $B_\theta/B_\phi = r\Delta\theta/R\Delta\phi$

$$q = \frac{r B_\phi}{R B_\theta}, \quad (6.4)$$

wobei  $r$  den kleinen Radius und  $R$  den großen Radius des Torus bezeichnet. Zur exakten Berechnung von  $q$  muss berücksichtigt werden, dass aufgrund der Toruskrümmung die magnetischen Felder auf der Torusinnenseite größer als auf der Torusaußenseite sind. Die Näherung konstanter Felder ergibt sich dann im Grenzfall eines großen Aspektverhältnisses  $R/r$ , wobei der Torus in einen Zylinder vom Radius  $r$  und der Länge  $2\pi R$  übergeht.

Die folgende Abbildung erläutert den Zusammenhang zwischen Sicherheitsfaktor und Feldliniensteigung.

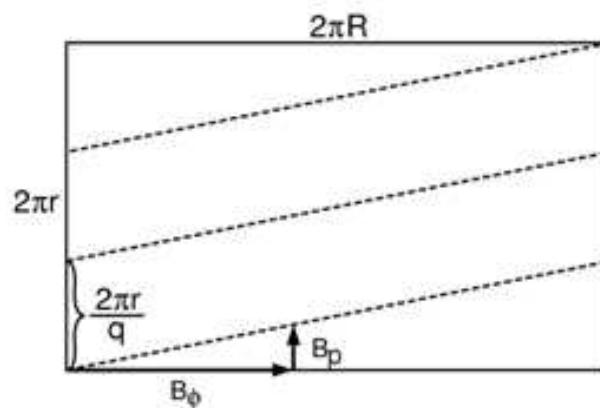


Abbildung 6.3: Anstieg der Feldlinien in einem Zylinder und Bedeutung des Sicherheitsfaktors  $q$ .

## 6.1 Das Tokamak-Prinzip

Im Tokamak (russisches Kunstwort für “Toroidale Kammer mit magnetischem Einschluss”) wird das Poloidalfeld von einem starken im Plasma fließenden Strom  $I_p$  erzeugt. Dieser wird durch einen Transformator, dessen Sekundärwindung das Plasma darstellt, induziert. Zusätzliche toroidal umlaufende Vertikalfeldspulen werden zur Form- und Lageregelung des Plasmas verwendet. Die folgende Abbildung zeigt das Prinzip des Tokamaks.

Der Tokamak ist eine axisymmetrische Anordnung, d. h.  $\phi$  ist eine ignorable Koordinate. Im Allgemeinen ist die Primärwicklung als zentraler Solenoid mit vielen Windungen ausgeführt. Damit erhalten wir im Plasma eine vergleichsweise geringe Umfangsspannung bei hohem Strom. Typische Werte betragen ca. 10V maximale Umfangsspannung und Plasmaströme bis zu mehreren MA. Das Poloidalfeld am Plasmarand liegt dann in der Gegend einiger 0.1T. Das Toroidalfeld wird mit  $B_\phi \approx 2-5T$  so gewählt, dass der Sicherheitsfaktor  $q$  am Rand für ein typisches Aspektverhältnis von  $R/a \approx 3-4$  (Plasmarand bei  $r = a$ ) bei  $q(a) \approx 3-5$  liegt.

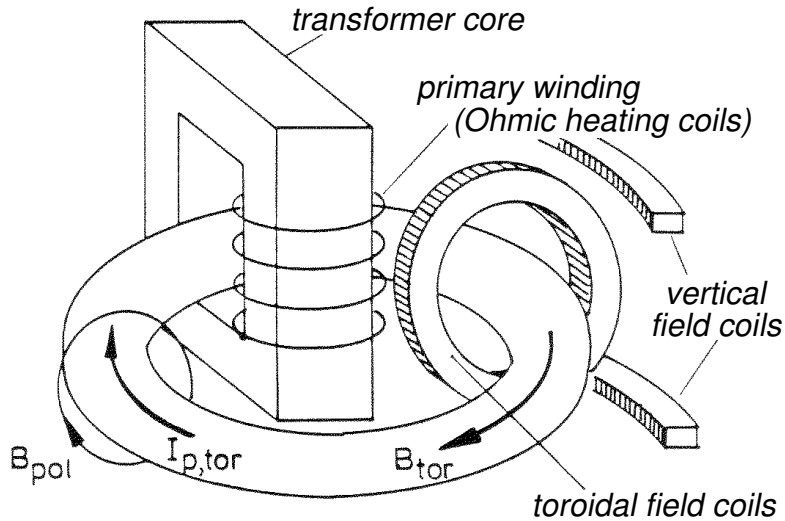


Abbildung 6.4: Prinzip des Tokamaks.

Der Verlauf des Sicherheitsfaktors im Plasmaminneren kann in zylindrischer Näherung wie folgt gewonnen werden. Nach dem Ampèreschen Gesetz berechnet sich das Poloidalfeld auf einer magnetischen Fläche zu

$$\oint B_{\theta} r d\theta = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{A}, \quad (6.5)$$

wobei die Integration über einen poloidalen Querschnitt auszuführen ist. In der zylindrischen Näherung ist  $B_{\theta}$  auf einer magnetischen Fläche konstant und wir erhalten das vom Z-Pinch bekannte Ergebnis

$$B_{\theta}(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}, \quad (6.6)$$

wobei  $I(r)$  der innerhalb der betrachteten Fläche fließende Gesamtstrom ist.

Aufgrund der Wärmeisolation senkrecht zu den magnetischen Flächen sind die Profile der Elektronentemperatur im Tokamak im Allgemeinen über den kleinen Radius monoton fallend. Wegen  $\sigma \sim T_e^{3/2}$  gilt dies auch für die Stromdichte. Der Gesamtstrom  $I = 2\pi \int j(r)r dr$  steigt somit schwächer als quadratisch an, das Poloidalfeld wächst dann schwächer als linear. Damit kommt es zu einem monotonen Wachstum des Sicherheitsfaktors im Plasma von der Achse zum Plasmarand hin. Die Magnetfeldlinien benachbarter magnetischer Flächen haben also, wie in Abb. ?? angedeutet, unterschiedliche Steigung. Man spricht auch von einem verscherten Magnetfeld, wobei die Größe  $s = (r/q)(dq/dr)$  die Verscherung (engl. shear) angibt. Typische Profile sind in Abbildung ?? dargestellt.

## 6.2 Stabilität gegen stromgetriebene Moden

Die Wahl des toroidalen Magnetfeldes wird wie bereits diskutiert von den Stabilitätseigenschaften bestimmt. Für zu geringes Magnetfeld kommt es insbesondere durch den Plasmastrom zu



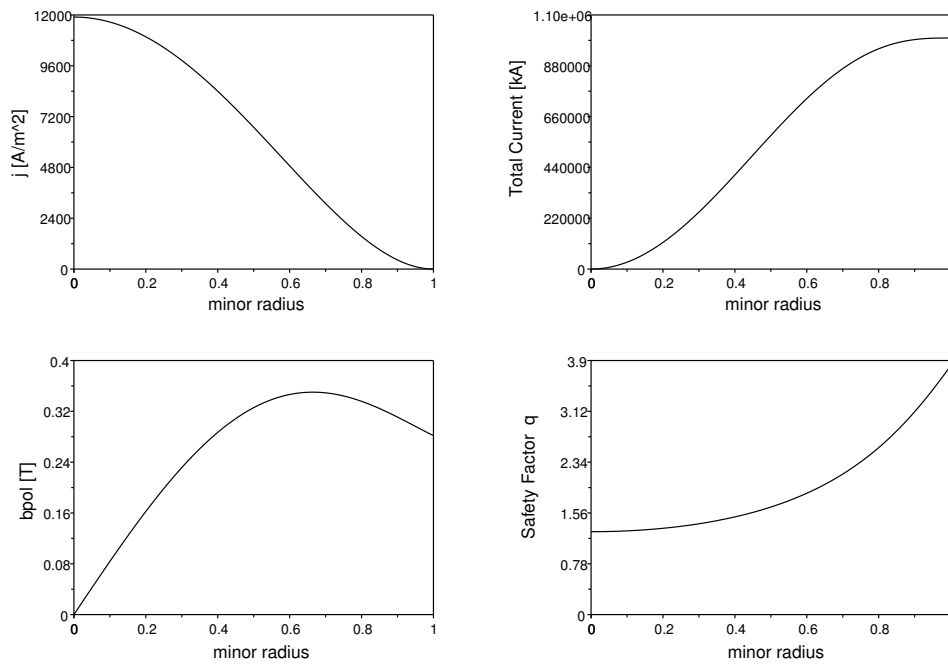


Abbildung 6.5: Profile von Stromdichte, Strom, Poloidalfeld und Sicherheitsfaktor im Tokamak (schematisch).

Instabilitäten. Wir wollen hier das im vorigen Kapitel eingeführte Energieprinzip verwenden, um die Stabilität des Tokamaks (hier für unendlich großes Aspektverhältnis, also eigentlich des Screw-Pinch) gegen stromgetriebene Instabilitäten untersuchen. Wie im vorigen Kapitel verwenden wir einen Fourier-Ansatz für die Störung

$$\xi(\vec{r}) = \vec{\xi}(r) e^{i(m\Theta + n\phi)}, \quad (6.7)$$

wobei wir auch Periodizität in z-Richtung vorausgesetzt haben. Da wir hier nur solche Instabilitäten betrachten wollen, die durch den Plasmastrom getrieben werden, vernachlässigen wir im Energieprinzip die Terme proportional zum Druckgradienten. Dann erhält man nach etwas längerer Rechnung folgenden Ausdruck für die Änderung der potentiellen Energie aufgrund einer kleinen Verschiebung des Plasmas

$$\begin{aligned} \delta W = & \frac{2\pi^2 B_\phi^2}{\mu_0 R_0} \int_0^a \left[ (r\xi')^2 + (m^2 - 1) \xi^2 \right] \left( \frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right)^2 r dr \\ & + \frac{2\pi^2 B_\phi^2}{\mu_0 R_0} \left( \frac{2}{q_a} \left( \frac{n}{m} - \frac{1}{q_a} \right) + (1 + m) \left( \frac{n}{m} - \frac{1}{q_a} \right)^2 \right) a^2 \xi_a^2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Aufgrund des Faktors  $\xi_a^2$  im zweiten Term ist es sinnvoll, zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich  $\xi(a) \neq 0$  und  $\xi(a) = 0$ . Im ersten Fall ist die Grenzfläche zwischen Plasma und Vakuum von der Störung betroffen, man spricht vom *externen Kink*. Im zweiten Fall ist die Plasmaoberfläche und damit auch das Vakuummagnetfeld ungestört (sog. *interner Kink*).

### 6.2.1 $\xi(a) \neq 0$ , externer Kink

In diesem Fall kommt der Hauptbeitrag vom Oberflächenterm. Im Oberflächenterm ist der zweite Summand immer positiv, folglich entscheidet der erste Term über das Stabilitätsverhalten. Dieser Term ist positiv, wenn  $n/m - 1/q_a > 0$ , d. h. das Stabilitätskriterium lautet

$$m/n < q_a. \quad (6.9)$$

Wir erhalten also Stabilität gegen externe Kinks, wenn die resonante Fläche mit  $q(r) = m/n$  innerhalb des Plasmas liegt. Der Umkehrschluss liefert, dass Instabilität möglich ist, wenn die resonante Fläche außerhalb des Plasmas liegt. Dies ist jedoch nur ein notwendiges, aber nicht hinreichendes Kriterium, da der (positive) Beitrag der anderen Terme mitberücksichtigt werden muss. Insbesondere hängt der stabilisierende Beitrag des Integrals über das Plasmaminnere von der Form des Stromdichteprofiles ab. Einsetzen realistischer Stromdichteverteilungen ergibt, dass der externe Kink vor allem dann instabil wird, wenn die Stromdichte im Randbereich hoch ist und die resonante Fläche nahe dem Plasmarand ist (ansonsten ist der stabilisierende Beitrag des gestörten Vakuumfeldes zu groß).

Im Tokamak sind diese Verhältnisse vor allem beim Stromaufbau gegeben; dann ist die Umfangsspannung und damit auch die Stromdichte am Rand hoch. Außerdem wird normalerweise das Toroidalfeld bereits vor dem Stromhochfahren auf seinen Maximalwert eingestellt, sodass  $q(a)$  bei steigendem Strom fällt und resonante Flächen durch den Plasmarand ins Vakuum treten. In der Praxis zeigt sich, dass vor allem Instabilitäten mit  $n = 1$  auftreten, daher findet man beim Stromaufbau im Tokamak gelegentlich externe Kinks mit  $m \approx q$ , wenn eine resonante Fläche die Plasmaoberfläche durchquert. Dies ist in Abb. 6.6 für das Tokamakexperiment ASDEX dargestellt. Diese Instabilität kann aber im Allgemeinen durch geschicktes Hochfahren des Stromes vermieden werden. Ein wichtiger Sonderfall ergibt sich für  $m = 1$ . Nimmt man in diesem Fall  $\xi = \text{const}$  an, so verschwindet der erste Term in (??). Damit hängt die Stabilität hier, im Gegensatz zu den Kinks mit  $m > 1$ , nicht vom Stromprofil ab. Einsetzen von  $m = 1$  ergibt

$$\delta W = \frac{4\pi^2 B_\phi^2}{\mu_0 R_0} / n \left( n - \frac{1}{q_a} \right) a^2 \xi_a^2. \quad (6.10)$$

Daraus folgt als notwendiges und hinreichendes Kriterium für Instabilität  $q_a < 1/n$ . Dieses Kriterium ist am restriktivsten für  $n = 1$ , es ergibt sich das sogenannte Kruskal-Shafranov Limit  $q_a \geq 1$ . Dieses Limit begrenzt für gegebenes Toroidalfeld den maximalen Plasmastrom. In der Praxis tritt jedoch bereits bei  $q_a = 2$  eine Instabilität auf, welche die Tokamakentladung beendet (sog. Disruption).

### 6.2.2 $\xi(a) = 0$ , interner Kink

Für den internen Kink ist  $\xi(a) = 0$ , damit bleibt in (??) nur das Integral über das Plasmaminnere übrig. Für  $m > 1$  ist der Beitrag immer positiv und wir finden, dass das Plasma generell stabil gegen interne Kink-Moden mit  $m > 1$  ist. Im Fall  $m = 1$  können wir wiederum  $\xi = \text{const}$  wählen, um  $\delta W$  zu minimieren. Allerdings steht dieser Ansatz im Widerspruch zu  $\xi(a) = 0$ . Wir müssen also ein  $\xi$  wählen, das irgendwo im Plasma vom konstanten Wert auf Null abfällt. Geschieht dies an der  $q = 1$  Fläche, so verschwindet der Beitrag zu  $\delta W$  wegen der Nullstelle von  $n/m - 1/q$ . Somit gilt  $\delta W = 0$  für eine Testfunktion, welche innerhalb der  $q = 1$  Fläche

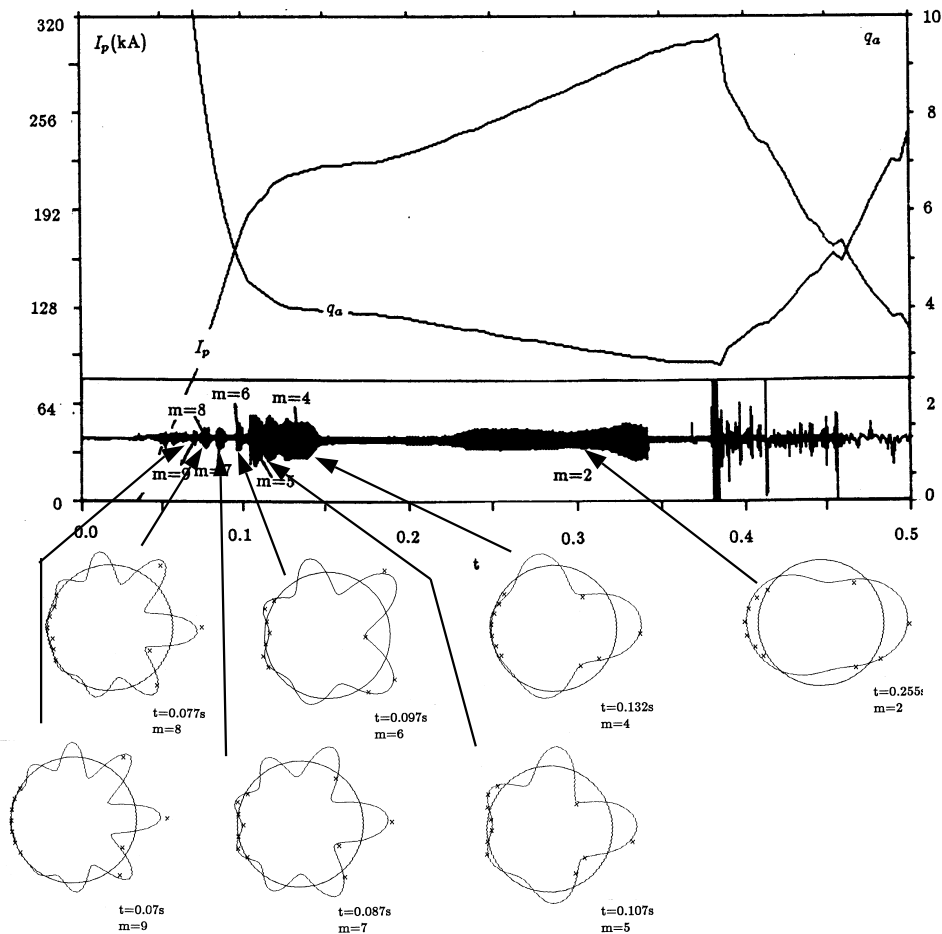


Abbildung 6.6: Ideale externe Kink-Instabilitäten beim Stromaufbau am Tokamakexperiment ASDEX. Die Rekonstruktion des gestörten Magnetfeldes zeigt das Auftreten von Moden mit  $m = q_a, n = 1$ , wenn  $q_a$  einen ganzzahligen Wert annimmt.

konstant ist und außerhalb verschwindet. Wie Abb. 6.7 verdeutlicht, entspricht dies einer Versetzung des Zentralplasmas innerhalb der  $q = 1$  Fläche.

Da  $\delta W = 0$  gilt, muss die nächste Ordnung der Entwicklung nach dem Aspektverhältnis Aufschluss über die Stabilität geben. Man findet tatsächlich, dass die (1,1) interne Kink-Mode für realistische Stromprofile für  $q(0) < 1$  oftmals instabil ist. Im Experiment ergibt sich oftmals eine (1,1) interne Kink-Mode, sobald  $q(0)$  unter 1 sinkt. Das Stabilitätskriterium für die ideale interne Kink-Instabilität lautet also

$$q(0) > 1. \quad (6.11)$$

Die Sonderrolle der (1,1) Mode rührt von ihrer besonderen Struktur her: bei dieser Störung ist die Topologie der Störung gleich der Topologie der Gleichgewichtsflussflächen, sodass eine Verformung besonders leicht möglich ist.

Die ideale MHD-Stabilität des Tokamaks gegen stromgetriebene Moden lässt sich somit wie folgt zusammenfassen:

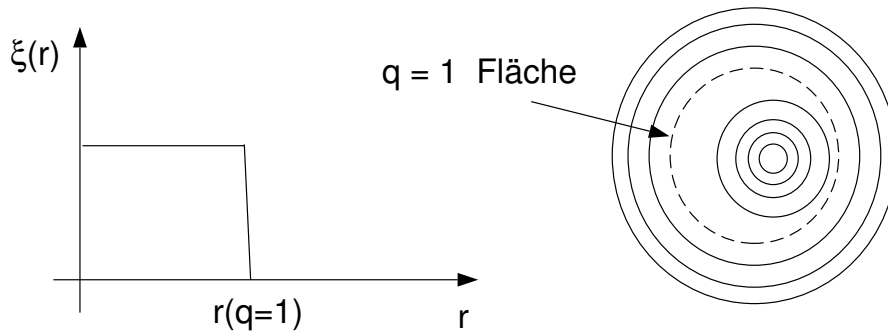


Abbildung 6.7: Eigenfunktion der internen Kink-Instabilität (links). Die Instabilität führt zu einer Versetzung des Plasmas innerhalb der  $q = 1$ -Fläche (rechts).

- Das Plasma ist stabil gegen externe Kink-Moden, wenn die resonante Fläche innerhalb des Plasmas liegt (dies ändert sich, wenn im Plasma endliche Resistivität berücksichtigt wird). Instabilität ergibt sich vor allem, wenn die resonante Fläche im Vakuum nahe der Plasmaoberfläche liegt und außerdem die Stromdichte in der Nähe des Plasmarandes hohe Werte aufweist.
- Aus der Forderung nach idealer externer Kink-Stabilität folgt  $q_a > 1$  (Kruskal-Shafranow Limit). Dies begrenzt für vorgegebenes Toroidalfeld den möglichen Gesamtstrom.
- Der interne Kink ist stabil für  $m > 1$ . Für  $m = 1$  ist er im Allgemeinen instabil für  $q(0) < 1$ . Dies begrenzt wegen  $q(0) = (2B_\phi)/(\mu_0 R_0 j(0))$  die Stromdichte auf der Achse.

Wenn sich die  $q = 1$ -Fläche im Plasma befindet, treten sogenannte Sägezähne auf (benannt nach der Form der resultierenden Temperaturstörung (siehe folgende Abbildung)).

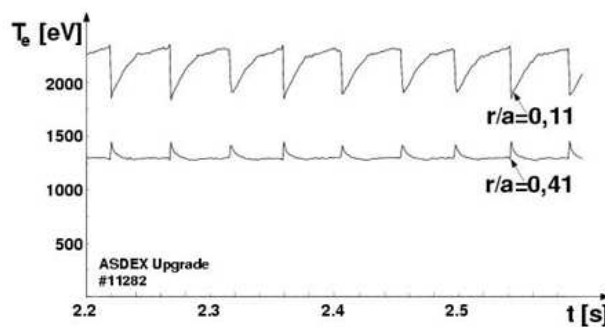


Abbildung 6.8: Temperaturstörungen infolge der sogenannten Sägezahninstabilität. Die Temperatur im Plasmazentrum (innerhalb der  $q = 1$ -Fläche) bricht plötzlich ein, außerhalb steigt dabei die Temperatur kurzzeitig an.

Die Sägezähne bewirken eine Umverteilung des Stromprofils. Das Stromprofil wird im Zentrum flacher, sodass der  $q$ -Wert im Plasmazentrum steigt.

Mit den oben beschriebenen Beschränkungen an das  $q$ -Profil ( $q_a = 3 - 5$ ) erhält man als Bedingung an das Toroidalfeld

$$B_\phi > 3 - 5 \frac{R}{r} B_p \approx 10 B_p. \quad (6.12)$$

Diese Forderung hat natürlich Auswirkungen auf die “Ökonomie” des magnetischen Einschlusses. Wir hatten bereits im Kapitel “Magnetischer Einschluss von Plasmen” den  $\beta$ -Wert eingeführt als Verhältnis aus Druck des eingeschlossenen Plasmas und Magnetfelddruck. In dieses Verhältnis geht nun natürlich auch der Magnetfelddruck des zusätzlichen Toroidalfeldes ein:

$$\beta = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_{tot}^2} \approx \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_\phi^2} \approx \frac{1}{100} \beta_p. \quad (6.13)$$

Der resultierende  $\beta$ -Wert liegt damit nur noch zwischen 1 und 10%.

### 6.3 Das Tokamak-Gleichgewicht

Wir hatten bereits zu Beginn des Kapitels das Konzept der magnetischen Flächen eingeführt. Auf magnetischen Flächen ist der Plasmadruck konstant. Wenn wir nun den magnetischen Fluss durch eine Fläche konstanten Drucks berechnen, finden wir wegen der Divergenzfreiheit des Magnetfeldes

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint_F \vec{B} d\vec{A} = 0, \quad (6.14)$$

dass auch der magnetische Fluss  $\int \vec{B} d\vec{A}$  auf einer magnetischen Fläche konstant ist. Das lässt sich anhand der folgenden Abbildung veranschaulichen. Wir betrachten ein Plasmavolumen, das von einer Fläche konstanten Druckes und den Flächen  $F_1$  und  $F_2$  begrenzt ist.

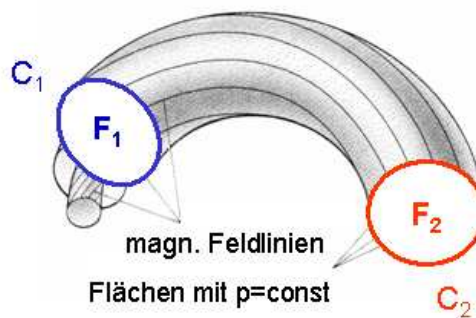


Abbildung 6.9: Zur Erläuterung der Konstanz des magnetischen Flusses auf einer Fläche mit konstantem Druck.

Da aus der Gleichgewichtsbedingung ( $\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$ ) folgt, dass  $\vec{B}$  in der Fläche  $p = const$  verläuft ( $\nabla p \cdot \vec{B} = 0$ ), verschwindet der magnetische Fluss durch diese Fläche:

$\int_{p=const} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ . Damit folgt

$$\int_{F_1} \vec{B} \cdot d\vec{A} = - \int_{F_2} \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad (6.15)$$

d. h. der magnetische Fluss durch eine Kurve auf einer Fläche konstanten Drucks ist konstant. Wir können nun im Prinzip zwei Sorten von geschlossenen Kurven auf einem Torus betrachten; die poloidal umlaufenden Kurven (die eine Fläche begrenzen auf der der toroidale Fluss  $\int B_\phi d\vec{A}$  konstant ist, vgl. Abb. ??) bzw. die toroidal umlaufenden Kurven (mit  $\int B_p d\vec{A} = const$ , dem poloidalen Fluss), vgl. Abb. ??.

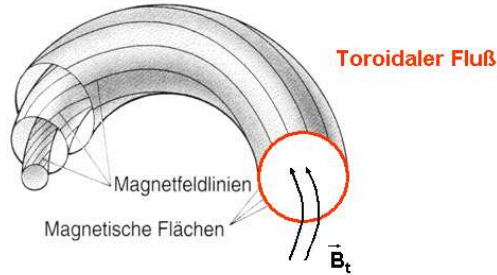


Abbildung 6.10: Zur Erläuterung des toroidalen magnetischen Flusses.

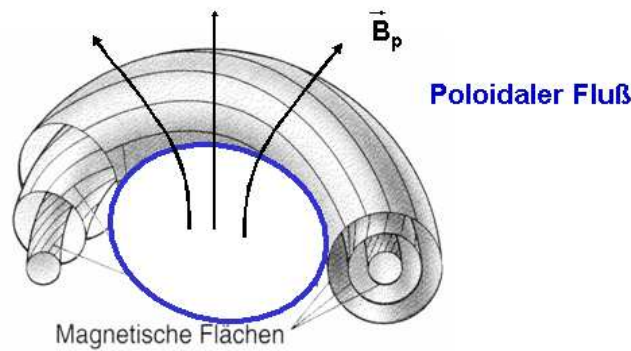


Abbildung 6.11: Zur Erläuterung des poloidalen magnetischen Flusses

Wir wollen im Folgenden den poloidalen magnetischen Fluss betrachten, um eine magnetische Fläche zu kennzeichnen. Der Strom durch diese Fläche ist dann der poloidale Strom. Wir wollen im Folgenden Projektionen der Kurve, die den poloidalen Fluss misst (vgl. Abb. ??) betrachten. Die Projektion auf die Fläche  $z = const$  misst den durch die  $z$ -Komponente des Magnetfeldes erzeugten Fluss:

$$\Psi(R, z = const) = 2\pi \int_0^R dR' R' B_z(R') \quad (6.16)$$

woraus

$$B_z = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (6.17)$$

folgt.

Analog folgt aus der Projektion auf  $R = const$  das Magnetfeld in radiale Richtung

$$\Psi(z, R = \text{const}) = -2\pi R \int_0^z dz' B_R(z') \quad \rightarrow \quad B_R = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (6.18)$$

Den Anteil des Toroidalfeldes, der zum magnetischen Einschluss beiträgt, wird vom Poloidalstrom erzeugt. Aus dem Ampèreschen Gesetz

$$\mu_0 j_z = \frac{1}{R} \frac{\partial (RB_\phi)}{\partial R} \quad (6.19)$$

und mit der Definition

$$I_{pol} = 2\pi \int_0^R R' dR' j_z \quad (6.20)$$

für den Poloidalstrom der Ausdruck

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I_{pol}}{2\pi R}. \quad (6.21)$$

Das Toroidalfeld ergibt sich also analog zum Vakuumfeld eines stromdurchflossenen Leiters. Dazu kommt natürlich noch der Anteil zum Toroidalfeld, der durch äußere Spulen erzeugt wird. Wenn man die oben abgeleiteten Zusammenhänge zwischen dem poloidalen Fluss und den Magnetfeldkomponenten verwendet, um die Kraftbilanz

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \vec{j} \times \vec{B}$$

mit Hilfe des poloidalen Flusses auszudrücken, findet man eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $\Psi$

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = \Delta^* \Psi = -\mu_0 2\pi R j_\phi = -\mu_0 (2\pi R)^2 p' - \mu_0^2 I_{pol}' I_{pol}, \quad (6.22)$$

wobei der Strich die Ableitung nach  $\Psi$  bezeichnet. Diese Gleichung ist auch als Grad-Shafranov-Gleichung bekannt. Sie beschreibt das toroidale axisymmetrische Gleichgewicht vollständig. Man erkennt wieder den Beitrag des toroidalen Stromes zur Druckbilanz sowie den Diamagnetismus des Plasmas, bei dem wiederum das Vakuum-Toroidalfeld wegen  $I_{pol,0}' = 0$  nicht zur Kraftbilanz beiträgt. Man beachte aber, dass die Grad-Shafranov-Gleichung nichtlinear in  $\Psi$  ist, da  $p$  und  $I_{pol}$  von  $\Psi$  abhängen. Daher muss sie im Allgemeinen numerisch gelöst werden.

Dabei müssen natürlich die Randbedingungen entsprechend spezifiziert werden. Die einfachste Randbedingung wäre eine unendlich leitende Wand um das Plasma anzunehmen. Das ist allerdings nicht realistisch. In der Regel wird das Plasma von einer Vakuumregion umgeben sein. Dann kann man vorgegebene Randbedingungen (z. B.  $\Psi = 0$  am Vakuumgefäß) durch Addition eines magnetischen Flusses  $\Psi_0$  mit  $\Delta^* \Psi_0 = 0$ , d. h. Vakuumfelder, erfüllen. Solch ein Fluss wird durch externe Ströme in toroidal umlaufenden Spulen (sog. Poloidalfeldspulen) erzeugt. Die Grad-Shafranov-Gleichung bestimmt somit die Lage und die notwendigen Ströme der Poloidalfeldspulen, um eine gewünschte Plasmakonfiguration im Gleichgewicht zu halten.

Wenn das Plasma nicht unmittelbar von einer leitenden Wand umgeben ist, sind immer zusätzliche Vakuumpfelder erforderlich, um das Plasma im Gleichgewicht zu halten. Ansonsten würde der Plasmaring expandieren. Ursachen für die Expansion des Plasmarings sind sowohl Plasmaströmung als auch Plasmadruck. Aufgrund der toroidalen Geometrie gibt es eine Expansionskraft durch den Plasmaströmung, denn analog zu einer stromdurchflossenen Leiterschleife wirkt wegen der abstoßenden Wirkung entgegengesetzt fließender Ströme eine expandierende Kraft. Der kinetische Plasmadruck führt ebenfalls zu einer Expansionskraft; dies ist analog zur Expansion z. B. eines Fahrradschlauches unter Druck: Der Plasmadruck ist auf einer magnetischen Fläche konstant, aber im Torus ist die Fläche auf der Niederfeldseite größer als auf der Hochfeldseite. Daher ist auf der Niederfeldseite die nach außen gerichtete Kraft größer als auf der Hochfeldseite.

Zur Kompensation dieser sogenannten Hoop-Force müssen die Poloidalfeldspulen in erster Ordnung ein Vertikalfeld  $B_z$  erzeugen, das, gekreuzt mit dem Plasmaströmung, eine Nettokraft radial nach innen ausübt. Dieses Feld stärkt das Magnetfeld auf der Außenseite, daher liegen, wie in Abbildung ?? zu sehen, die Flussflächen näher zusammen, während auf der Innenseite der entgegengesetzte Effekt auftritt.

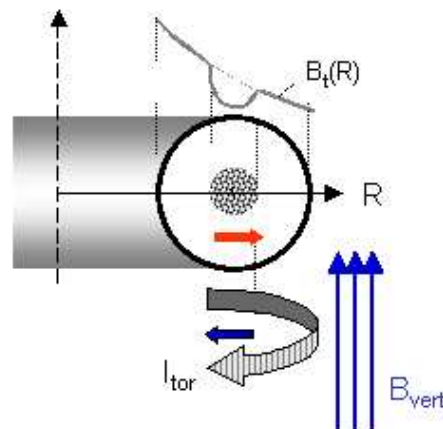


Abbildung 6.12: Die nach außen gerichtete Kraft eines stromdurchflossenen Plasmarings muss durch ein externes Vertikalfeld kompensiert werden.

Da der magnetische Fluss auf einer Fläche konstanten Plasmadrucks konstant ist

$$\int_0^{a_{rechts}} B_{pol}(r) \cdot 2\pi r dr = \int_0^{a_{links}} B_{pol}(r) \cdot 2\pi r dr,$$

verschiebt sich die magnetische Achse nach außen. Eine zusätzliche Verschiebung der magnetischen Achse ergibt sich durch die am Anfang des Kapitels diskutierten Pfirsch-Schlüter-Ströme. Wie bereits beschrieben, schwächen diese auch das Poloidalfeld auf der Innenseite und stärken es auf der Außenseite. Dies wird in Abbildung ?? nochmals verdeutlicht.

In der Abbildung ?? werden Gleichgewichte bei unterschiedlichem Plasmadruck diskutiert. Im Fall a: für kleinen Plasmadruck, ist der magnetische Druck durch das Poloidalfeld viel höher als der Plasmadruck. Ohne Toroidalfeld würde das Plasma so weit komprimiert werden, bis  $\beta_{pol} = 1$  ist. Mit dem Toroidalfeld entsteht der erforderliche Gegendruck vor allem durch Kompression des im Plasma eingeschlossenen Toroidalfeldes. Das Toroidalfeld übersteigt daher das



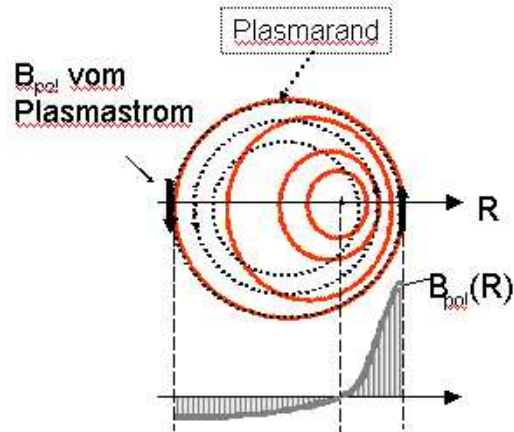


Abbildung 6.13: Das von außen angelegte vertikale Magnetfeld stärkt das Magnetfeld auf der Torusaußenseite und schwächt es auf der Innenseite. Die magnetische Achse verschiebt sich entsprechend.

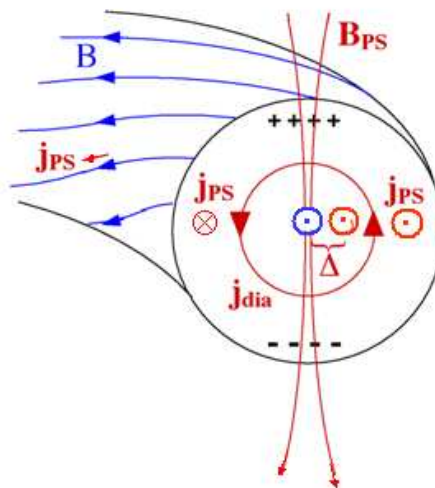


Abbildung 6.14: Verschiebung der magnetischen Achse durch die Pfeirsch-Schlüter-Ströme.

Vakuumpfild, d. h. das Plasma wird paramagnetisch (bezüglich des Toroidalfeldes). Wenn der Plasmadruck gerade so gewählt wird, dass  $\beta_{pol} = 1$  ist, verändert das Plasma nicht den Verlauf des Toroidalfeldes, das dann gleich dem Vakuumpfild ist (Fall b). Bei weiterer Steigerung des Plasmadrucks (Fall c) wird auch das Toroidalfeld zum Einschluss benötigt, das Plasma verhält sich diamagnetisch bezüglich des Toroidalfeldes. Mit steigendem Druck wird auch ein größeres Vertikalfeld nötig, um die radiale Plasmalage zu halten. Nach dieser Diskussion können wir auch leicht verstehen, dass es schon aus Gründen des Gleichgewichts eine Grenze an den Plasmadruck gibt.

Für zu hohes  $\beta_p$  ist das Vertikalfeld so stark, dass es auf der Innenseite das Feld zu Null macht. Dann entsteht eine sogenannte Separatrix, welche das Plasma magnetisch begrenzt. Bei weiterer Erhöhung von  $\beta_p$  nimmt nun der kleine Plasmaradius ab. Eine genauere Analyse ergibt, dass im Tokamak  $\beta_p$  auf Werte von der Größenordnung des Aspektverhältnisses begrenzt ist. Dies führt zu einer Begrenzung des gesamten  $\beta$  auf  $\beta_{max} \approx r / (Rq^2)$ . Für einen typischen Tokamak

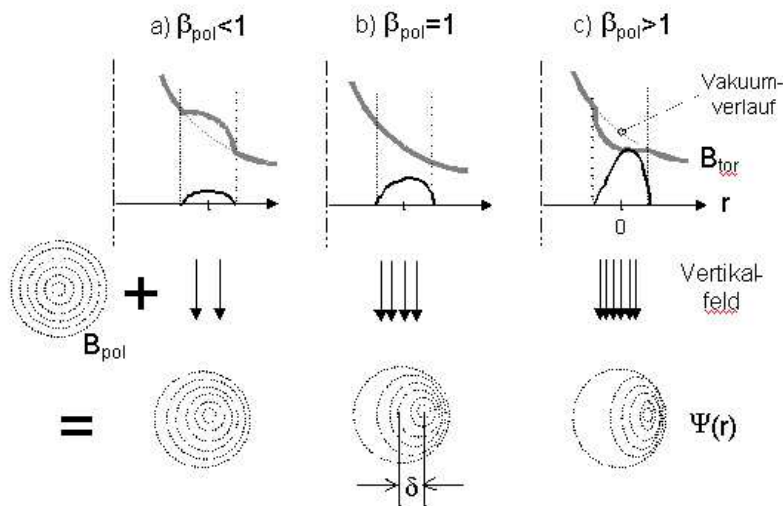


Abbildung 6.15: Abhängigkeit der Gleichgewichte vom Plasmadruck.

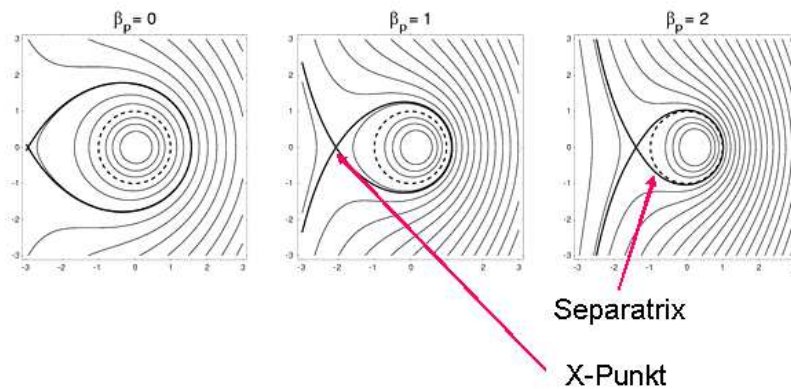


Abbildung 6.16: Verringerung des Plasmaquerschnitts bei hohem Plasmadruck.

mit  $r/R \approx 1/3$  und  $q \approx 3$  bedeutet dies z. B.  $\beta_{max} \approx 3\%$ . In der Praxis wird im Tokamak jedoch das erreichbare  $\beta$  oftmals durch druckgetriebene MHD-Instabilitäten limitiert.

In modernen Tokamaks wird das System der Poloidalfeldspulen auch zur Formgebung (Elongation etc.) benutzt; so wird z. B. in der sogenannten Divertor-Konfiguration eine magnetische Begrenzung durch eine Separatrix verwendet. Damit kann die Zone der intensiven Plasma-Wand-Wechselwirkung am Plasmarand vom heißen Plasma entfernt gehalten werden. Der Vergleich einer Limiterkonfiguration mit einer Divertorkonfiguration ist in Abb. 6.16 gezeigt.

## 6.4 Der Stellarator

Beim Stellarator (lat. stella = der Stern) wird das Poloidalfeld gänzlich von externen Spulen erzeugt. Hierbei stellt sich zunächst das Problem, dass aufgrund des fehlenden Toroidalstromes im Plasma wegen des Ampèreschen Gesetzes das Umlaufintegral über  $B_\theta$  verschwindet. Eine dem Tokamak analoge Lösung mit näherungsweise konstantem  $B_\theta$  gibt es daher nicht. Ein von Null verschiedenes Poloidalfeld kann jedoch durch höhere Multipolmomente des Stromes erzeugt werden. Dann variiert  $B_\theta$  in einer poloidalen Ebene z. B. sinusförmig, sodass  $\oint B_\theta d\theta = 0$

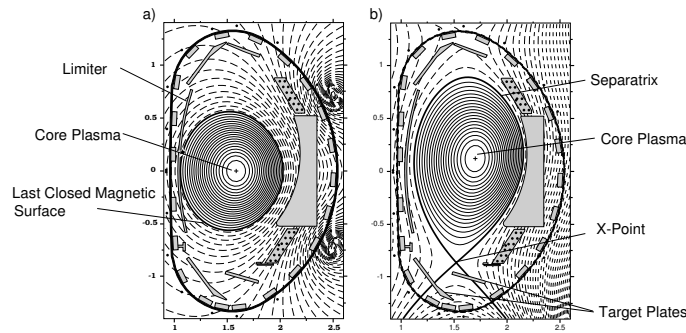


Abbildung 6.17: Vergleich des materiellen Limiters mit dem magnetischen Limiter (Divertor).

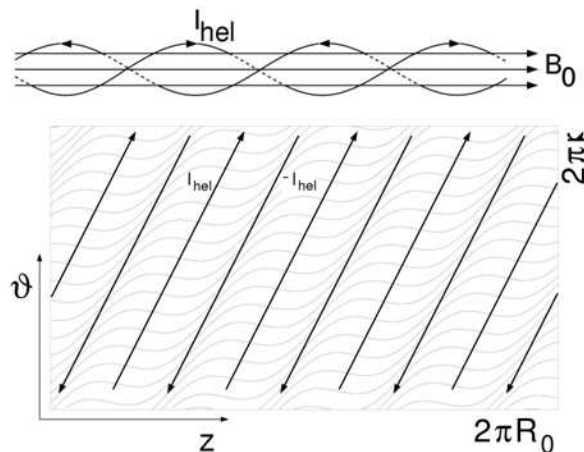


Abbildung 6.18: Schematische Darstellung der Feldliniensteigung in einem Stellarator.

gewährleistet ist. Die Verteilung der externen toroidalen Ströme, welche dieses Feld erzeugen, müssen dann ebenfalls ein höheres Multipolmoment beinhalten. Verschraubt man nun die externen Ströme helikal, so ergeben sich im Plasma umlaufende Feldlinien. Dieses ist in der Abbildung ?? schematisch dargestellt.

Allerdings ist die Konfiguration, im Gegensatz zum Tokamak, jetzt nicht mehr axisymmetrisch, vielmehr variieren die Magnetfelder nun auch in toroidaler Richtung. Damit kann man durch externe verschraubte Leiter eine Konfiguration erzeugen, welche auf einem Torus umlaufende Feldlinien erzeugt. Die Summe der helikalen Ströme ist wiederum Null, sodass sich ein Multipolfeld ergibt. In dieser auch *Helias* genannten Anordnung lässt sich die Stromverteilung in den externen Leitern näherungsweise durch

$$I(\theta) = I_0 \sin(l\theta - M\phi) \quad (6.23)$$

beschreiben. Man erkennt, dass hier näherungsweise eine helikale Symmetrie vorliegt, d. h.  $(l\theta - M\phi)$  ist eine ignorable Koordinate. Zusätzlich zu den helikalen Strömen benutzt man im Experiment oftmals auch Spulen, welche ein reines Toroidalfeld erzeugen. Die Addition der beiden Felder erlaubt eine experimentelle Variation der Feldliniensteigung und damit des Sicherheitsfaktors. Beispiele für Heliaskonfigurationen sind in Abb. 6.17 gezeigt. Sie werden nach der Zahl  $l$ , d. h. der Periode in poloidaler Richtung benannt.

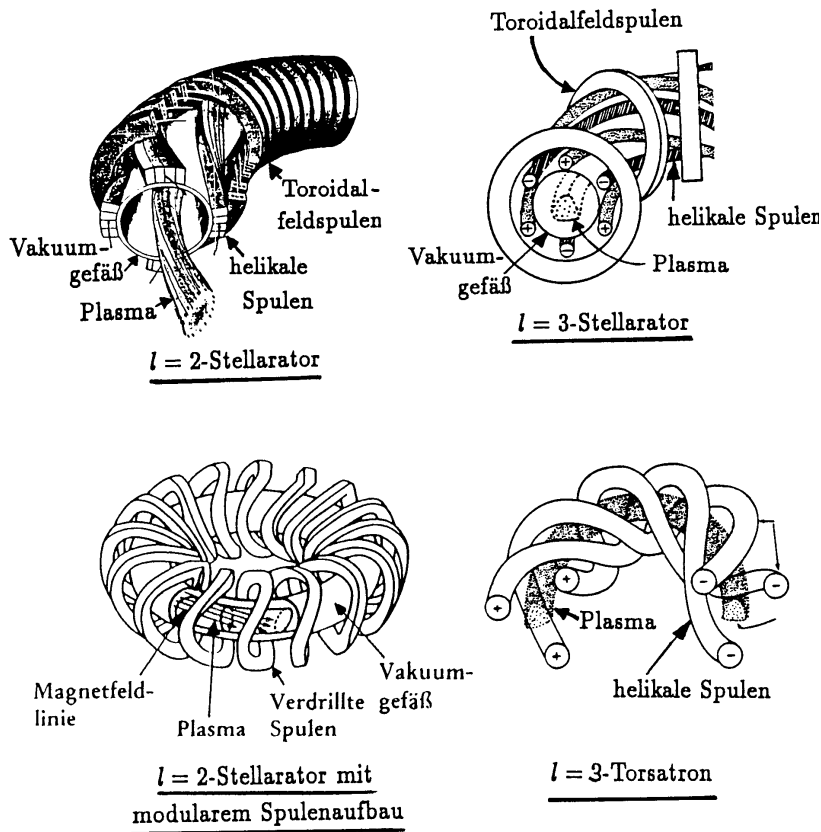


Abbildung 6.19: Verschiedene Realisierungen des Stellaratorprinzips.

In Abb. ?? sind noch zwei weitere Varianten des oben beschriebenen Prinzips zu sehen. Im Stellarator mit modularem Spulenaufbau wird die Summe von planaren Toroidal-feldspulen und helikal umlaufenden Stellaratorwindungen durch einen Satz von komplex geformten, dreidimensionalen Spulen ersetzt. Dies ist im Hinblick auf die Reaktortauglichkeit (z. B. zur Möglichkeit, Spulen auszuwechseln) von Vorteil. Im Torsatron ist die Summe der Windungsströme von Null verschieden, daher kann im Plasma ein Strom induziert werden. Die Konfigurationen unterscheiden sich durch ihre Verscherung: während der  $l = 2$  Stellarator praktisch keine magnetische Verscherung aufweist, ist diese beim  $l = 3$ -Stellarator und beim Torsatron von ähnlicher Größenordnung wie im Tokamak. Allerdings variiert sie im umgekehrten Sinne, d. h.  $q$  fällt von innen nach außen ab. Schließlich kann man auch noch die näherungsweise helikale Symmetrie aufgeben, d. h. die Ganghöhe der Stellaratorwindungen variieren. So gelangt man zu Stellarator-konfigurationen, wie sie z. B. für das im Bau befindliche Stellaratorexperiment Wendelstein 7-X vorgesehen sind. Hier ist die Konfiguration aufgrund theoretischer Voraussagen im Hinblick auf Transport und Stabilitätseigenschaften optimiert worden. Trotz der Vorteile der prinzipiellen Möglichkeit des stationären Betriebs und des Fehlens des Plasmastromes und damit der Stromabbruchinstabilität ist die Stellarator-konfiguration heutzutage experimentell weniger fortgeschritten als der Tokamak. Dies liegt vor allem an den experimentellen Problemen des Plasmaaufbaus (hier muss in jedem Fall mit Zusatzheizung gearbeitet werden), als auch an der Komplexität des Spulenaufbaus. Zusätzlich hat der Stellarator ein großes Aspektverhältnis von  $R/a \approx 10 - 15$ , sodass für vergleichbare Lineardimensionen das Plasmavolumen erheblich kleiner ist. Man muss daher zu größeren Werten des großen Radius  $R$  gehen. Bei konsequenter Weiterentwicklung könnte jedoch der Stellarator ein aussichtsreicher Kandidat für den Fusionsreaktor werden.

### 6.4.1 Das Stellaratorgleichgewicht

Während im Tokamak der toroidale Winkel eine ignorable Koordinate ist, hat der Stellarator eine echte 3-dimensionale Abhängigkeit. Das bedeutet, dass man ein Stellaratorgleichgewicht nicht wie vorher beim Tokamak durch eine einfache partielle Differentialgleichung beschreiben kann. Streng genommen kann man nicht einmal generell die Existenz von ineinandergeschachtelten magnetischen Flächen beweisen, die für den magnetischen Einschluss existentiell ist. Das Problem wird beispielsweise deutlich, wenn wir uns zunächst einen geraden Stellarator mit helikaler Symmetrie vorstellen. Dieser hat wegen seiner 2-dimensionalen Geometrie ineinander verschachtelte magnetische Flächen. Wenn man den geraden Stellarator aber zu einem Torus biegt, kann man die dadurch hervorgerufene Änderung des Gleichgewichts als Störung betrachten. Prägt man eine Störung mit den Fourier-Amplituden  $P_{mn}$  auf, brechen die ursprünglichen magnetischen Flächen auf und es bilden sich Inseln auf der resonanten Fläche  $q = m/n$ . In der folgenden Abbildung ist dies gezeigt am Beispiel einer aufgeprägten  $m = 5$ -Störung.

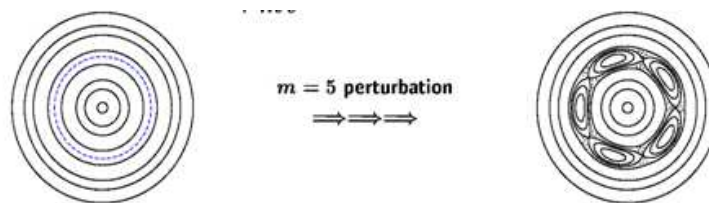


Abbildung 6.20: Aufbrechen der magnetischen Flächen durch eine Magnetfeldstörung mit  $m = 5$ .

Die Breite dieser Inseln ist proportional zur Wurzel des Störfeldes und wächst für abnehmende magnetische Verscherung. Die Ausbildung solcher magnetischer Inseln ist natürlich problematisch für den magnetischen Einschluss: jetzt können sich die Plasmateilchen entlang des Magnetfeldes in radialer Richtung bewegen. Daher trägt der Bereich, über den sich diese Inseln erstrecken, nicht zum Einschluss bei. Da man in 3-dimensionalen Geometrien die magnetischen Inseln aber nicht vermeiden kann, gibt es 2 Strategien, ihren Einfluss zu minimieren. Man kann eine große magnetische Verscherung wählen. Dann gibt es viele rationale Flächen mit  $q = \frac{m}{n}$ , die aber jeweils eine nur geringe Breite haben oder eine sehr flache magnetische Verscherung, wobei dann keine rationalen  $q$ -Werte mit niedrigen  $m, n$ -Werten im Plasma sind.

### 6.4.2 Analogie zur Mechanik periodischer Systeme

Die geometrischen Eigenschaften der Feldlinien in einem Torus haben eine große Ähnlichkeit mit der Mechanik von periodischen oder fast periodischen Bewegungen. Daher wird für die Beschreibung der Feldlinien oft die Hamiltonsche Dynamik verwendet. Wir wollen als eine Analogie zur Inselbildung im Stellarator die Bewegung eines Pendels betrachten. Wenn man in einer Orts-Impulsebene die Bewegung eines Pendels mit der Frequenz  $\omega_p$  durch Markierung seines Zustandes zu festen Zeitabständen  $\tau_b = \frac{2\pi}{\omega_p}$  in der  $(q, p)$ -Ebene darstellt, findet man ein Bild wie in der Abbildung ?? links. Diese Darstellung wird als Poincaré-Plot bezeichnet. Ist die Energie des Pendels ausreichend gering, so dass das Pendel vor Erreichen der Maximalhöhe umkehrt, liegen die Punkte in der  $(q, p)$ -Ebene auf geschlossenen Kurven. (Dabei wird schon die Analogie zur Behandlung der Magnetfeldlinien deutlich, wo die Durchstoßpunkte der Feldlinien an einem bestimmten toroidalen Winkel aufgetragen werden.)

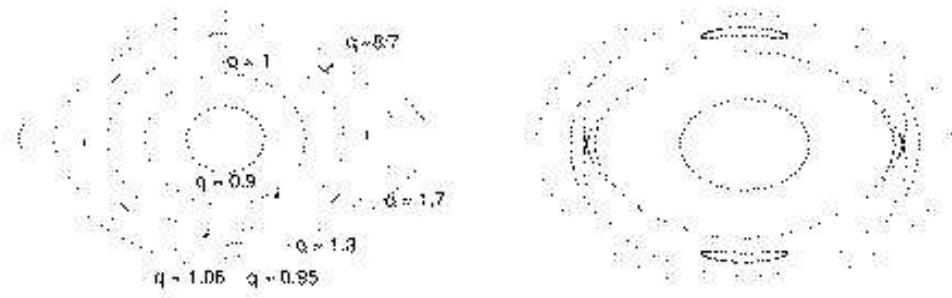


Abbildung 6.21: Poincaré-Plot für die Pendelbewegung. Die Beobachtungsfrequenz  $w_b$  wird etwa gleich der Pendelfrequenz  $w_p$  gewählt ( $w_b = w_p$  entspricht  $q = w_p/w_b = 1$ ). Rechts wurde die Pendelbewegung gestört durch Annahme einer zeitlich variierenden Gravitationskonstante  $g = g_0 + g_1 \cos w_s$  mit  $w_s = w_b$ , was zur Bildung von Inseln im Phasenraum an der  $q = 1$ -Fläche führt.

Für ein irrationales Verhältnis  $w_p/w_b$  bedecken die Punkte diese Bahnkurve vollständig, während für ein rationales Verhältnis die Bahnkurven in sich geschlossen sind und daher nur wenige Punkte zu sehen sind. (In der Analogie zu den Feldlinien entspricht die Beobachtungsfrequenz dem inversen toroidalen Winkel und die Pendelfrequenz dem inversen poloidalen Winkel.) Unterschiedliche Energien des Pendels entsprechen Flächen mit unterschiedlichen Radien.

Unter Einfluss einer zusätzlichen Störkraft (bspw. durch Annahme einer zeitlich variierenden Gravitationskonstante für das rechte Bild in obiger Abbildung) können sich wie vorher für die Feldlinien im Stellarator Inseln bilden. In der Nähe des  $x$ -Punktes wird die Bewegung chaotisch. Magnetfeldlinien werden in einem solchen Fall ergodisch.

# Kapitel 7

## Neoklassischer Transport in toroidalen Systemen

### 7.1 Klassischer Transport

Wir haben uns bereits im 1. Semester (Kapitel “Diffusion und Transport”) mit dem Transport von Teilchen und Energie in Plasmen beschäftigt.

Für den Fall ohne Magnetfeld (bzw. längs des Magnetfeldes) hatten wir bereits festgestellt, dass die Wärmeleitfähigkeit stark mit der Temperatur zunimmt ( $\kappa_e \sim T^{5/2}$ ). In einem Fusionsplasma mit magnetischem Einschluss ist daher der Transport längs der Feldlinien praktisch immer so groß, dass keine nennenswerten Gradienten von Dichte und Temperatur auf einer magnetischen Fläche aufrechterhalten werden können. Somit ist nicht nur der Druck  $p$  auf der magnetischen Fläche konstant, sondern auch  $T$  und  $n$  selbst. Senkrecht zu den magnetischen Flächen ist die Teilchenbewegung durch die Gyration stark eingeschränkt und wir erwarten drastisch reduzierte radiale Transportkoeffizienten. Das Verständnis des Senkrechttransportes ist in Fusionsplasmen besonders wichtig, da bei bekannten Transportkoeffizienten die Dichte- und Temperaturprofile berechnet werden können. Die Integration dieser Profile gibt schließlich Auskunft über die globalen Einschlusszeiten  $\tau_E$  und  $\tau_P$ . Die Isolationsgüte des magnetischen Einschlusses wird also direkt durch die Transportkoeffizienten bestimmt; damit bestimmen diese wiederum die Dimensionierung eines Fusionsreaktors. Transport in Plasmen kann durch unterschiedliche Prozesse verursacht werden, wir wollen hier im wesentlichen auf zwei Mechanismen eingehen:

- Binäre Stöße: Für ein einzelnes Teilchen ist der Einschluss im Magnetfeld für eine Tokamakgeometrie perfekt; es folgt den Feldlinien um den Torus. In Anwesenheit anderer Teilchen erleidet es Stöße. Dabei wird das Teilchen versetzt und ändert seine radiale Position. Dieser Mechanismus führt zur *Diffusion*.
- Instabilitäten: Bereits aus der Flüssigkeitsbeschreibung des Plasmas ergibt sich eine Vielzahl von MHD Instabilitäten, welche zu turbulenten Fluktuationen im Plasma führen. Solche turbulenten Phänomene können Teilchen und Energie in radiale Richtung transportieren. Wie sich herausstellen wird, sind diese in Fusionsplasmen sehr wichtig für das Verständnis des Transportes.

Wir hatten unter Annahme eines Random-Walk-Ansatzes bereits den Transportkoeffizienten senkrecht zum Magnetfeld aufgrund von Stößen

$$D = r_L^2 \nu$$

gefunden, wobei  $r_L$  der Gyrationradius (die typische Versatzlänge bei einem Stoß) und  $\nu$  die Stoßfrequenz sind.

Dieses auch als *klassischer Transport* bekannte Ergebnis lässt sich auch mit Hilfe der Flüssigkeitsgleichungen erhalten. Dazu gehen wir vom Ohmschen Gesetz aus

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}, \quad (7.1)$$

wobei  $\eta$  der spezifische Widerstand des Plasmas ist. Zur Berechnung der Geschwindigkeit senkrecht zu den magnetischen Flächen multiplizieren wir vektoriell mit  $\vec{B}$  und erhalten

$$\vec{v}_\perp = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \frac{\eta}{B^2} \vec{j} \times \vec{B} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \eta \frac{\nabla p}{B^2}, \quad (7.2)$$

wobei wir im letzten Schritt von der Gleichgewichtsbedingung  $\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$  Gebrauch gemacht haben. Damit zerfällt der Transport in zwei Anteile: den konvektiven Transport aufgrund der  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift und den durch  $\nabla p$  getriebenen diffusiven Anteil. Man beachte, dass die Diffusion durch den Effekt der Stöße zustande kommt; im stoßfreien Fall ( $\eta \rightarrow 0$ ) verschwindet der zweite Term. Für die Untersuchung des Teilchentransports setzen wir  $T = \text{const}$  und erhalten mit dem in Kapitel "Diffusion und Transport" hergeleiteten Ansatz  $\eta = \nu m_e / (n e^2)$  für den stoßbestimmten Transport

$$\vec{v} = -\eta \frac{2k_B T \nabla n}{B^2} = -\frac{\nu m_e 2k_B T}{n e^2 B^2} \nabla n = -\frac{1}{n} r_L^2 \nu \nabla n. \quad (7.3)$$

Der Vergleich mit dem Diffusionsansatz  $\vec{\Gamma} = n \vec{v} = -D \nabla n$  liefert schließlich das oben hergeleitete Ergebnis. Wir müssen nun spezifizieren, welche Sorte von Stößen zum Transport beiträgt. Dazu betrachten wir die Gleichung für die Position des Gyrationzentrums:

$$\vec{r}_g = \frac{m}{q B^2} \vec{v} \times \vec{B} = \frac{\vec{p} \times \vec{B}}{q B^2}. \quad (7.4)$$

Wegen der Impulserhaltung folgt daraus für den Versatz beim Stoß gleichartiger Teilchen (also z. B. Elektronen mit Elektronen)

$$\Delta \vec{r}_1 = \frac{\Delta \vec{p}_1 \times \vec{B}}{e B^2} = -\frac{\Delta \vec{p}_2 \times \vec{B}}{e B^2} = -\Delta \vec{r}_2. \quad (7.5)$$

Stöße zwischen gleichartigen Teilchen tragen also nicht zum Teilchentransport bei; es erfolgt nur ein Platzwechsel der Teilchen. Solche Stöße können jedoch zum Energietransport beitragen, etwa wenn ein heißes Teilchen seinen Platz mit einem kalten tauscht. Für Stöße zwischen Elektronen und Ionen erhalten wir wegen der gegensätzlichen Ladung  $\Delta \vec{r}_e = \Delta \vec{r}_i$ . Somit wird der Teilchentransport durch die Stöße zwischen Elektronen und Ionen bestimmt und ist ambipolar, d. h. der radiale Versatz ist für beide Teilchensorten gleich; es erfolgt keine Ladungstrennung. Dies sieht man auch aus der Betrachtung der Diffusionskoeffizienten



$$D_e = r_{L,e}^2 \nu_{ei} = \left( r_{L,i} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \right)^2 \nu_{ie} \frac{m_i}{m_e} = D_i. \quad (7.6)$$

Eine ähnliche Ableitung gilt für den Energietransport, ausgedrückt durch die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$ . Allerdings muss hier beachtet werden, dass auch Stöße zwischen gleichen Teilchen zum Transport beitragen. Man erhält so z. B. für die Wärmeleitung aufgrund der Stöße der Ionen untereinander

$$\kappa_{ii} = n_i r_{L,i}^2 \nu_{ii} \quad (7.7)$$

Die explizite Dichteabhängigkeit können wir noch durch Definition des Wärmeleitkoeffizienten

$$\chi = \kappa/n \quad (7.8)$$

beseitigen. Der Wärmeleitkoeffizient  $\chi$  hat nun ebenfalls die Einheit eines Diffusionskoeffizienten:  $[\chi] = m^2/s$ . Für die Größenordnung der einzelnen Beiträge zur Wärmeleitung gilt aufgrund der unterschiedlichen Massenabhängigkeiten des Larmorradius und der Stoßfrequenzen

$$\chi_{ee} \approx \chi_{ei} \approx \chi_{ie} \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \chi_{ii}. \quad (7.9)$$

Im klassischen Fall ist also die Wärmeleitung aufgrund von Stößen der Ionen untereinander der dominante Mechanismus. Diese Ergebnisse finden allerdings in heißen Fusionsplasmen keine Bestätigung. Vielmehr findet man dort, dass alle Wärmeleitkoeffizienten von gleicher Größenordnung sind. Zusätzlich sind die Absolutwerte erheblich größer: Einsetzen von  $r_{Le} \approx 100 \mu m$  und  $\tau_{ee} \approx 300 \mu s$  (Werte für 10keV und  $n = 1 \times 10^{20} m^{-3}$ ) ergibt  $D \approx \chi \approx 10^{-5} - 10^{-4} m^2/s$ . Die experimentell bestimmten Werte liegen dagegen bei  $\chi \approx 1 m^2/s$  und  $D \approx 0.1 m^2/s$ . Zusätzlich sollten die Transportkoeffizienten wegen  $r_L^2 \nu \sim (\sqrt{T})^2 / T^{3/2}$  mit steigender Temperatur wie  $1/\sqrt{T}$  abnehmen, in der Praxis steigen sie jedoch mit zunehmender Heizleistung und dadurch erhöhter Temperatur an. Diese Diskrepanzen legen nahe, dass andere Transportmechanismen den Wärme- und Teilchentransport in Fusionsplasmen dominieren. Die Implikation dieser Diskrepanz zeigt sich, wenn man versucht, die Dimensionierung eines Fusionsreaktors mit magnetischem Einschluss abzuschätzen. Für den Querschnitt des Plasmas erhält man aus  $\tau_E \approx a^2/\chi$  ( $a$  ist der kleine Plasmaradius) für den Zielwert  $\tau_E \approx 5 s$  für einen Fusionsreaktor des klassischen Wertes von  $\chi$  den kleinen Radius  $a = 7 mm$ , unter Verwendung des experimentell bestimmten Wertes jedoch  $a = 2.2 m$ , im Einklang mit der vorher erwähnten Größe geplanter Zündexperimente (z. B. ITER). Der hohe Wärmeverlust aus magnetisch eingeschlossenen Plasmen führt somit zur Notwendigkeit großer, technisch aufwendiger Experimente.

## 7.2 Neoklassischer Transport im Tokamak

Im vorherigen Abschnitt hatten wir gesehen, dass die klassische Vorstellung der Diffusion nicht die im Experiment beobachteten Transportkoeffizienten erklären kann. Es muss also weitere

Transportprozesse geben, welche in der obigen Vorstellung nicht berücksichtigt wurden. Für den Transport aufgrund binärer Stöße ergibt sich im Torus ein signifikanter Beitrag von den im inhomogenen Magnetfeld gefangenen Teilchen.

Das Magnetfeld in einem toroidal eingeschlossenen Plasma fällt nach außen wie  $1/R$  ab, es ist also nicht konstant entlang der Magnetfeldlinien. Bereits im Kapitel "Teilchenbewegung in elektrischen und magnetischen Feldern haben wir gelernt, dass wegen der adiabatischen Invarianz des magnetischen Moments Teilchen in Gebieten hoher Magnetfelder reflektiert werden können. Läuft ein Teilchen von außen nach innen in ein Gebiet höherer Magnetfeldstärke, so wird es, falls die Spiegelbedingung

$$\frac{v_{\parallel}^2 (R_0 + r)}{v_{\perp}^2 (R_0 + r)} < \frac{B_{max}}{B_{min}} - 1$$

erfüllt ist, reflektiert.

Wegen der Überlagerung der Krümmungs- und  $\nabla B$ -Drift ergibt sich als Teilchenbahn der gefangenen Teilchen eine sogenannte "Bananenbahn": Geht man z. B. von Punkt A in der folgenden Abbildung ?? aus, so driftet ein Proton auf dem Weg zur Mittelebene (Punkt B) längs der Feldlinie zunächst von der ursprünglichen magnetischen Fläche weg, jenseits der Mittelebene wieder zur magnetischen Fläche hin. Beim oberen Reflexionspunkt (Punkt C) erreicht das Teilchen die magnetische Fläche. Auf dem Rückweg entfernt es sich wiederum von der magnetischen Fläche, diesmal jedoch nach außen. Wegen der Drift im (wesentlich kleineren) Poloidalfeld,  $v_D \propto \nabla B \times B_p$  in Kombination mit der Verscherung der Feldlinien schließt sich die Bananenbahn nicht in sich selbst, sondern präzediert, wie in der Abbildung links dargestellt, langsam in toroidaler Richtung. Von der Projektion der Teilchenbahn auf eine poloidale Ebene leitet sich die Bezeichnung "Bananenbahn" ab.

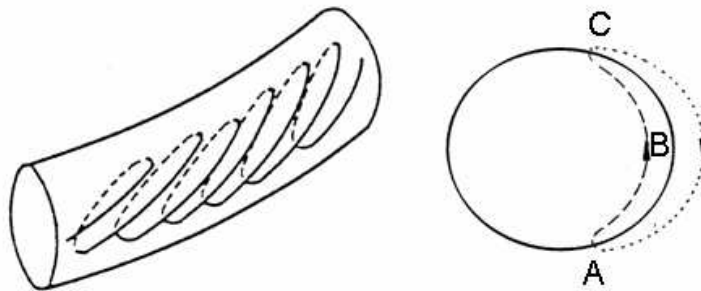


Abbildung 7.1: Bahn gefangener Teilchen im Tokamakplasma.

Die radiale Exkursion der Bananenbahn ist erheblich größer als der Gyroradius. Zur Berechnung der Transportkoeffizienten ist hier also als typische Versetzungslänge bei einem Stoß die Bananenbreite  $w_B$ , d. h. die radiale Ausdehnung der Bananenbahn einzusetzen. Weiterhin ergibt sich eine effektive Stoßfrequenz  $\nu_{eff}$ , mit der gefangene Teilchen aufgrund von Stößen so viel Parallelenergie erhalten, dass sie zu freien Teilchen werden. Diese beiden Größen wollen wir im Folgenden ableiten. Der durch die gefangenen Teilchen verursachte Transport wird als *neoklassischer Transport* bezeichnet. Die Anzahl der gefangenen Teilchen lässt sich wie folgt berechnen: Biegt man einen Plasmazylinder zum Torus, so erhöht sich wegen  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  das Magnetfeld auf der Innenseite des Torus. Der Haupteffekt kommt durch das toroidale Magnetfeld zustande, welches in guter Näherung wie ein Vakuumfeld beschrieben werden kann und daher wie

$$B_\phi = \frac{B_0 R_0}{R} \quad (7.10)$$

variiert. Hierbei ist  $R_0$  der große Radius der betrachteten magnetischen Fläche und  $B_0$  der Wert bei  $R = R_0$ . Das Spiegelverhältnis auf einer magnetischen Fläche mit kleinem Radius  $r$  ergibt sich damit zu

$$\frac{B_{max}}{B_{min}} - 1 = \frac{B_0 (R_0 + r)}{B_0 (R_0 - r)} - 1 = \frac{1 + r/R_0}{1 - r/R_0} - 1 = \frac{2r/R_0}{1 - r/R_0}. \quad (7.11)$$

Im Tokamak und im Stellarator ist das Aspektverhältnis  $R/r$  in den meisten Fällen deutlich größer als 1, sodass die Größe  $\epsilon = r/R$  als Kleinheitsparameter verwendet werden kann. Damit kann  $\epsilon$  gegen die 1 vernachlässigt werden und wir erhalten für die Spiegelbedingung im Torus

$$\left| \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \right| < \sqrt{2\epsilon}. \quad (7.12)$$

Um den Anteil der gefangenen Teilchen an der Gesamtteilchenzahl zu bestimmen, müssen wir nun über die Verteilungsfunktion integrieren. Unter der Annahme einer Maxwell-Verteilung können wir die Kugelsymmetrie im Geschwindigkeitsraum ausnutzen. Wir integrieren daher über die Oberfläche der Einheitskugel im Geschwindigkeitsraum. Die Oberfläche ist gerade  $4\pi$ . Der Anteil der gefangenen Teilchen ist dann durch den Teil der Kugeloberfläche gegeben, der durch Rotation der zwei durch (??) gegebenen Ursprungsgeraden um die  $v_{\parallel}$ -Achse aus der Kugeloberfläche herausgeschnitten wird. Die folgende Abbildung verdeutlicht die Geometrie.

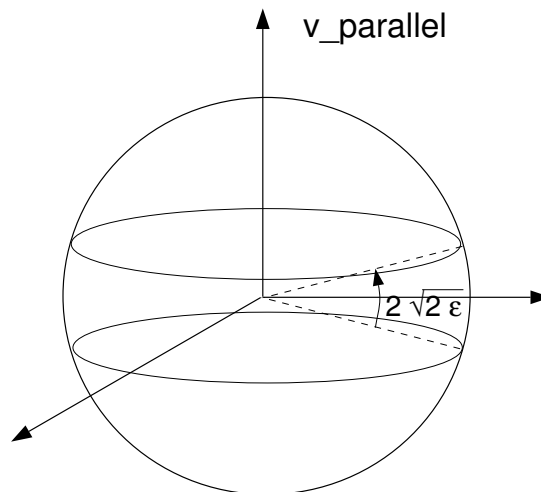


Abbildung 7.2: Geometrie zur Bestimmung des Anteils der gefangenen Teilchen im Torus. Auf der Kugeloberfläche ergibt sich der Anteil der gefangenen Teilchen aus dem Flächeninhalt des durch den Kegel der gefangenen Teilchen herausgeschnittenen Flächenstückes.

Die Integration läuft also im Azimutalwinkel  $\theta = \arctan v_{\parallel}/v_{\perp}$  von  $-\arctan\sqrt{2\epsilon}$  bis  $\arctan\sqrt{2\epsilon}$ . Wegen der Kleinheit von  $\sqrt{2\epsilon}$  gilt  $\tan\theta \approx \theta$  und so ergibt sich der Anteil der gefangenen Teilchen zu

$$\frac{n_t}{n} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\sqrt{2\epsilon}}^{\sqrt{2\epsilon}} \cos\theta d\theta = \frac{1}{2} \left( \sin\sqrt{2\epsilon} - \sin(-\sqrt{2\epsilon}) \right) \approx \sqrt{2\epsilon}. \quad (7.13)$$

Die effektive Stoßfrequenz der Teilchen muss im Detail mit Hilfe der Verteilungsfunktion abgeleitet werden. Es ergibt sich

$$\nu_{eff} = \frac{\nu}{2\epsilon} \quad (7.14)$$

d. h. ein erhöhter Wert. Dies hat seine Ursache darin, dass im Plasma viele Kleinwinkelstöße aufsummiert werden müssen, um zu einem effektiven Streuwinkel zu kommen. Im klassischen Fall betrug dieser Streuwinkel  $90^\circ$ , für die gefangenen Teilchen jedoch ist der notwendige Streuwinkel, um das Teilchen zu verlieren, nur derjenige, der es zu einem freien Teilchen macht. Nach Gl. (??) ist dieser Winkel gerade  $\sqrt{2\epsilon}$ . Andererseits lässt sich der Effekt von Stößen auf die Verteilungsfunktion auch als Diffusion im Geschwindigkeitsraum deuten; die Teilchen kehren durch Random-Walk zur Maxwell-Verteilung zurück. Daher ist die Zeitskala für eine Winkeländerung im Geschwindigkeitsraum gerade durch das Quadrat des Winkels gegeben. Hieraus erklärt sich der Faktor  $2\epsilon$  in Gleichung (??).

Schließlich wollen wir noch die Bananenbreite  $w_B$  ableiten. Die Exkursion eines Teilchens von der magnetischen Fläche ist durch die  $\vec{B} \times \nabla B$ -Drift gegeben. Daher lässt sich die Bananenbreite in etwa durch  $v_D \Delta t$  abschätzen, wobei  $v_D$  die Driftgeschwindigkeit und  $\Delta t$  die Zeit, welche das Teilchen zum Durchlaufen der Banane benötigt, bezeichnet. Für die Driftgeschwindigkeit erhalten wir unter Verwendung der Formel für die  $\vec{B} \times \nabla B$ -Drift und mit (??)

$$v_D = \frac{m}{eBR} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2v_{\perp}^2} \right) \approx \frac{m}{2eBR} v_{\perp}^2, \quad (7.15)$$

wobei wir im letzten Schritt Gebrauch von der Kleinheit der Parallelgeschwindigkeit der gefangenen Teilchen gemacht haben (siehe Gl. (??)). Die Zeit  $\Delta t$ , welche das Teilchen braucht, um die Bananenbahn zu durchlaufen, ist durch die Länge  $L$  der Bahn längs der Feldlinie und die Parallelgeschwindigkeit gegeben.  $L$  ist wegen der kleinen Feldliniensteigung im Wesentlichen durch den Weg in toroidale Richtung, d. h.  $L = R\Delta\phi$  gegeben. Diese Länge können wir mit Hilfe der Feldliniensteigung in den poloidalen Winkel  $\Delta\theta$ , den das Teilchen bis zum Umkehrpunkt durchläuft, ausdrücken:

$$L = R\Delta\phi = \frac{B_{\phi}}{B_{\theta}} r \Delta\theta = \frac{q}{\epsilon} r \Delta\theta = qR\Delta\theta. \quad (7.16)$$

Diese Darstellung hat den Vorteil, dass für gegebenes  $v_{\parallel}/v_{\perp}$  der toroidale Umlaufwinkel zwischen den Umkehrpunkten zwar mit dem Sicherheitsfaktor  $q$  variiert, der poloidale Winkel jedoch konstant ist. Die Verhältnisse sind in Abbildung ?? dargestellt.

Mit dieser Länge berechnet sich nun die zum Durchlaufen der Bananenbahn notwendige Zeit zu

$$\Delta t = L/v_{\parallel} = \frac{qR\Delta\theta}{v_{\parallel}}. \quad (7.17)$$

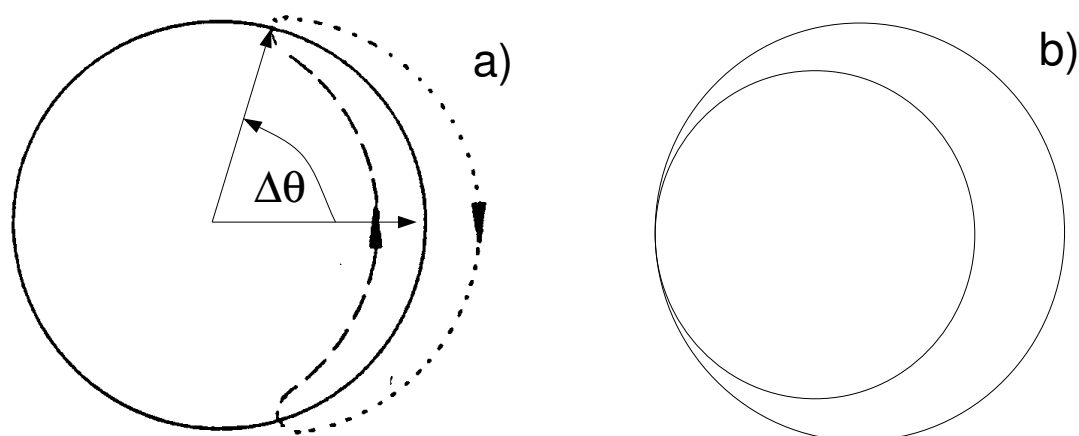


Abbildung 7.3: Projektion von Bananenbahnen in der poloidalen Ebene. Der poloidale Winkel  $\Delta\theta$  mißt die Variation dieses Winkels bis zum Umkehrpunkt (a). Die maximale Bananenbreite ergibt sich für ein Teilchen, welches auf der Innenseite bis zur Mittelebene läuft (b).

Die Bananenbreite ist schließlich durch

$$w_B = v_D \Delta t = \frac{mv_\perp}{eB} \frac{q}{2} \frac{v_\perp}{v_\parallel} \Delta\theta = r_L \frac{q}{2} \frac{v_\perp}{v_\parallel} \Delta\theta \quad (7.18)$$

gegeben. Wir können die maximale Bananenbreite abschätzen, indem wir ein Teilchen betrachten, dessen Umkehrpunkt genau auf der Torusinnenseite liegt (dieses Teilchen wird durch einen beliebig kleinen Stoß zu einem freien Teilchen). Dies entspricht der Bahn (b) in Abbildung ???. Für dieses Teilchen gilt dann  $v_\parallel/v_\perp = \sqrt{2\epsilon}$  und  $\Delta\theta = \pi$ , sodass sich für die Bananenbreite

$$w_B = r_L \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{q}{\sqrt{\epsilon}} \approx r_L \frac{q}{\sqrt{\epsilon}} \quad (7.19)$$

ergibt. Die Bananenbreite ist somit um den Faktor  $q/\sqrt{\epsilon}$  größer als der Gyroradius. Wir können nun den Beitrag zum Diffusionskoeffizienten aufgrund der gefangenen Teilchen berechnen. Dazu setzen wir das Random-Walk-Argument für den Anteil der gefangenen Teilchen mit charakteristischer Schrittweite  $w_B$  und Stoßzeit  $1/\nu_{eff}$  an:

$$D_{neo} = w_B^2 \nu_{eff} \frac{n_t}{n} = r_L^2 \frac{q^2 \nu}{2\epsilon^2} \sqrt{2\epsilon} \approx \frac{q^2}{\epsilon^{3/2}} D_{klass}. \quad (7.20)$$

Setzen wir, etwa für ein Teilchen beim halben Plasmaradius,  $\epsilon = 1/10$  und  $q = 2$ , so erhalten wir  $D_{neo} \approx 100 D_{klass}$ . Damit wird der Teilchentransport in diesem Bereich des Plasmas immer noch um den Faktor  $\approx 10$  unterschätzt. Dies ist noch ausgeprägter beim Elektronenwärmtransport; hier beträgt die Diskrepanz zwei Größenordnungen. Der Ionenenergetransport ist nur noch um einen Faktor 3-5 zu klein; hier könnten neoklassische Effekte bereits eine Rolle spielen.

In der obigen Formel für den neoklassischen Transport fällt auf, dass  $D$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  divergiert.

Dies ist zunächst erstaunlich, da bei diesem Grenzübergang gerade das klassische (zylindrische) Ergebnis erhalten werden sollte. Allerdings ist obige Theorie für diesen Grenzfall auch nicht anwendbar, weil es bei  $\epsilon = 0$  keine gefangenen Teilchen gibt. Die Teilchenbahnen in der Nähe der magnetischen Achse sind auch bei kleinen Parallelgeschwindigkeiten keine Bananenbahnen.

Eine korrekte Ableitung ergibt, dass der obige Transportkoeffizient nur dann Gültigkeit besitzt, wenn die Teilchen zwischen zwei Stößen ihre Bananenbahn häufig durchlaufen können. Es liegt daher nahe, eine sogenannte Kollisionalität  $\nu^*$  zu definieren, indem man die Stoßfrequenz auf die Zeit, die das Teilchen zum Durchlaufen einer Banane braucht, normiert:

$$\nu^* = \nu_{eff} \Delta t = \frac{\nu q R}{2\epsilon v_{\parallel}}. \quad (7.21)$$

Dann kann man den neoklassischen Transport in drei Gebiete unterteilen:

- $\nu^* \leq \epsilon^{3/2}$ : Die Teilchen durchlaufen die Bananenbahn oftmals, bevor sie stoßen. In diesem sogenannten “Banana-Regime” gilt der obige Diffusionskoeffizient  $D_{Banana} = D_{klass} q^2 / \epsilon^{3/2}$ .
- $\nu^* \geq 1$ : Die Teilchen stoßen oftmals, bevor sie ihre Bananenbahn beenden können. In diesem sogenannten “Pfirsch-Schlüter-Regime” gilt

$$D_{PS} = q^2 r_L^2 \nu = q^2 D_{klass}. \quad (7.22)$$

Hier ist der Transport nur um den kleineren Faktor  $q^2$  erhöht.

- $\epsilon^{3/2} \leq \nu^* \leq 1$ : In diesem Bereich ist die Stoßzeit zweier Teilchen von der Größenordnung der zum Durchlaufen der Bananenbahn benötigten Zeit. Man findet

$$D_{Plat} = \frac{v_{th} r_L^2 q}{R}. \quad (7.23)$$

Da der Diffusionskoeffizient hier nicht von  $\nu^*$  abhängt, wird dieses Regime als “Plateauregime” bezeichnet.

Abb. 7.4 zeigt die Variation von  $D$  mit der Kollisionalität  $\nu^*$ . Danach steigt  $D$  im Banana- und Pfirsch-Schlüter-Regime linear mit  $\nu^*$  an, die Steigung ist jedoch unterschiedlich. Für den klassischen und neoklassischen Transport erwartet man aufgrund der  $r_L$ -Abhängigkeit eine Skalierung  $D \sim B^{-2}$ . Auch dies wird in der Praxis nicht immer beobachtet; des Öfteren variiert  $D$  auch wie  $B^{-1}$  (sog. *Bohm*-Diffusion).

### 7.3 Neoklassischer Transport im Stellarator

Bisher haben wir uns mit den Bahnen gefangener Teilchen im axialsymmetrischen Torus beschäftigt. Wir haben die Bananenbahnen als Bahnen der gefangenen Teilchen gefunden. Diese Bahnen sind toroidal geschlossen. Das ist jedoch nicht selbstverständlich. Die Tatsache, dass sich

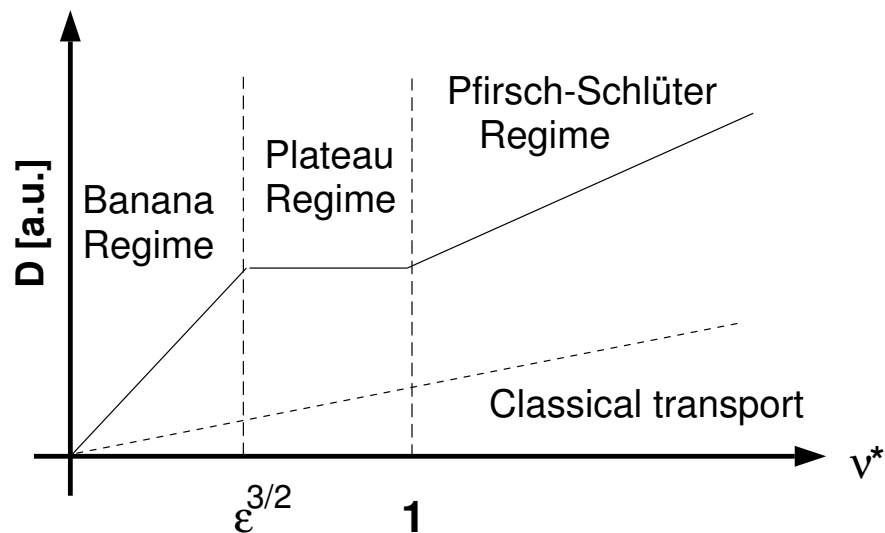


Abbildung 7.4: Der Verlauf des neoklassischen Diffusionskoeffizienten als Funktion der Kollisionalität  $\nu^*$  (normiert auf dem Wert im Plateau-Regime).

die Teilchen im Tokamak nicht weit von ihrer Flussfläche entfernen konnten, folgt aus der Symmetrie der Anordnung. Der toroidale Winkel  $\varphi$  ist eine ignorable Koordinate, weshalb der zum toroidalen Winkel kanonisch konjugierte Impuls konstant ist. Der kanonisch konjugierte Impuls folgt aus der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{mv^2}{2} + e_{\pm} \vec{v} \cdot \vec{A} - e_{\pm} \Phi \quad \text{mit} \quad v_{\varphi} = R \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$p_{\varphi}^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \frac{d\varphi}{dt} + e_{\pm} RA_{\varphi} = \text{const.}$$

$A_{\varphi}$  ist aus dem poloidalen Magnetfeld  $\vec{B}_p = \nabla \times \vec{A}_{\varphi} = -\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z} \vec{e}_R + \frac{\partial A_p}{\partial z} \vec{e}_z$  bestimmt. Bei der Ableitung der Grad-Shafranov-Gleichung hatten wir  $\vec{B}_p = -\frac{\vec{e}_R}{2\pi R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\vec{e}_z}{2\pi R} \frac{\partial \Psi}{\partial R}$  gefunden, woraus  $RA_{\varphi} = \frac{\Psi}{2\pi}$  folgt und daher  $\Psi = \frac{2\pi}{e_{\pm}} (p_{\varphi}^k - mRv_{\varphi})$ .

Damit findet man, dass aus der kleinen Änderung der toroidalen Geschwindigkeit der Teilchen im inhomogenen Magnetfeld auch nur eine geringe Änderung des poloidalen magnetischen Flusses folgt. Ein Teilchen kann also wegen der begrenzten Änderung von  $v_{\varphi}$  das Plasma nicht verlassen. Bei Fehlen einer Symmetrie gilt dieses Argument allerdings nicht.

In allgemeiner Geometrie können gefangene Teilchen daher durchaus stoßfrei das Plasma verlassen. Ein Beispiel für eine Drift der gefangenen Teilchen, die zu einer radialen Auswärtsbewegung führt, ist in der folgenden Abbildung skizziert. Die Umkehrpunkte der Driftbahnen liegen hierbei nicht auf der gleichen Flussfläche.

Wenn wir nun wieder den radialen Teilchentransport als Funktion der Stoßfrequenz betrachten, finden wir für große Stoßfrequenz einen ähnlichen Verlauf wie beim Tokamak. Wird die Stoßfrequenz sehr klein, entfernen sich die Teilchen zwischen zwei Stößen zunehmend von der Flussfläche. Daher nimmt die Teilchendiffusion mit abnehmender Stoßfrequenz zu ( $\sim 1/\nu$ ), für eine schematische Darstellung siehe Abbildung ??.

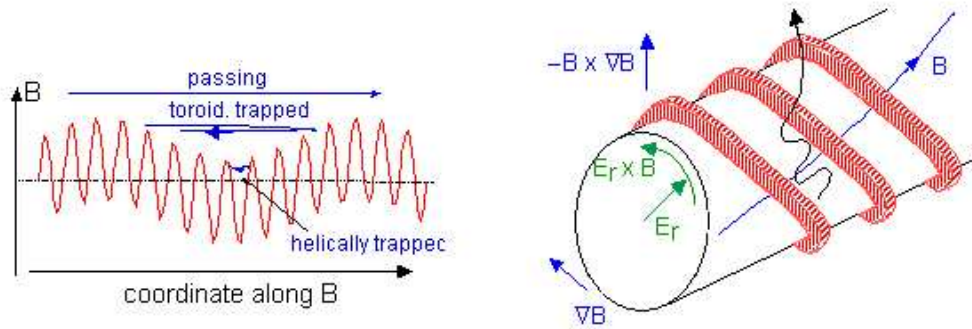


Abbildung 7.5: In 3-dimensionaler Magnetfeldgeometrie können die Driften dazu führen, dass die Teilchen das Plasma stoßfrei verlassen.

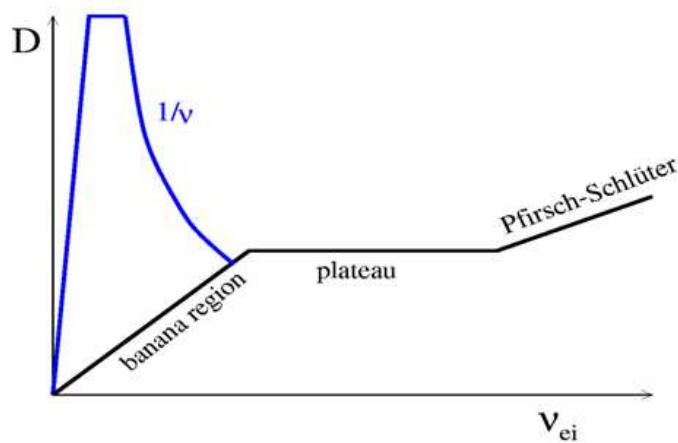


Abbildung 7.6: Neoklassischer Diffusionskoeffizient als Funktion der Stoßfrequenz im Stellarator, zum Vergleich ist auch der Tokamakfall angegeben.

Für sehr kleine Stoßfrequenzen kann man eigentlich nicht mehr von einer Diffusion sprechen, die Teilchen verlassen bei großer freier Weglänge ohne Stoß das Plasma.

Damit hat man genau umgekehrte Verhältnisse wie in der Spiegelmaschine: für Bereiche mit großem Verhältnis  $v_{\perp}/v_{\parallel}$  (gefangene Teilchen!) bildet sich ein Verlustkegel in der Verteilungsfunktion aus. Dieser wird durch Stöße immer wieder aufgefüllt. Für verschwindende Stoßfrequenz wird der radiale Transport dann wieder kleiner, weil die zum Auffüllen des Verlustkegels erforderlichen Stöße nicht mehr stattfinden. Da für gleiche Temperatur die Elektronen eine größere Stoßfrequenz haben, verlassen vorwiegend die Ionen das Plasma. Dadurch lädt sich das Plasma stark negativ auf. Die Ionen werden am Verlassen des Plasmas gehindert und die radiale Geschwindigkeit von Elektronen und Ionen wird gleich groß (ambipolarer Transport). Damit gibt es im Gegensatz zur axisymmetrischen Konfiguration keinen freien Parameter mehr. Bei gegebener Stoßfrequenz ist das resultierende elektrische Feld festgelegt. Die Verhältnisse sind in Abbildung ?? für  $T_e = T_i = const.$  und ein Wasserstoffplasma für einen Stellarator im Vergleich mit einem Tokamak dargestellt. Im Tokamak nimmt der Diffusionskoeffizient wie oben diskutiert mit fallender Stoßfrequenz monoton ab und hängt für nicht zu großes elektrisches Feld nicht davon ab. Im Stellarator ist das radiale elektrische Feld von großer Bedeutung. Bei vorgegebenem elektrischem Feld schneiden sich die Diffusionskoeffizienten von Ionen und Elektronen (Kurven i und e) bei einer Stoßfrequenz, für die Ambipolarität erreicht wird. (Diese



sind in der Abbildung durch Kreise markiert.) Durch Variation des elektrischen Feldes kann man dann aus den jeweiligen Schnittpunkten die Kurve des effektiven (ambipolaren) Diffusionskoeffizienten als Funktion der Stoßfrequenz erhalten.

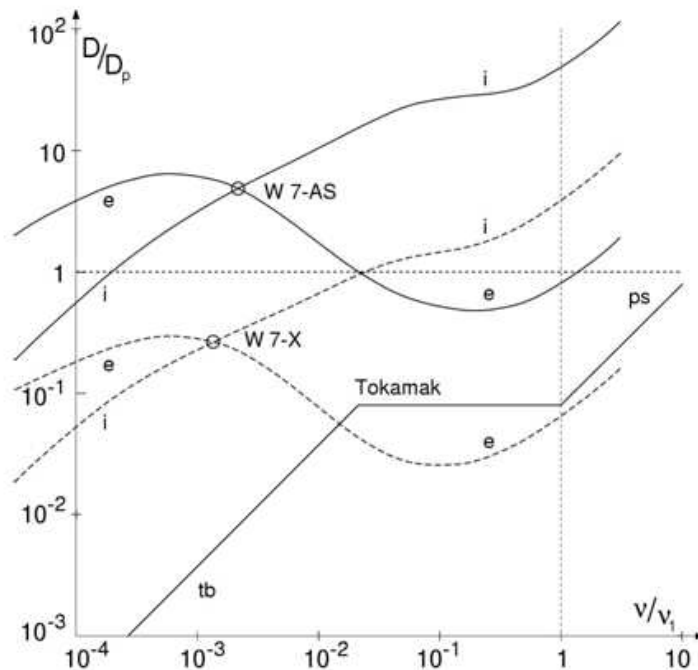


Abbildung 7.7: Neoklassische Diffusionskoeffizienten für Elektronen und Ionen im Stellarator und im Tokamak. Relevant ist der Wert für den ambipolaren Transport (Kreise). Beim optimierten Stellarator W7-X ist der neoklassische Transport deutlich reduziert.

Wegen des gegenüber dem Tokamak deutlich erhöhten neoklassischen Transports erschien der Stellarator zunächst kaum als Reaktor geeignet. In den ersten Stellaratorexperimenten war das Erreichen hoher Temperaturen unmöglich, da ja gerade die schnellen Teilchen (wegen der größeren freien Weglänge) das Plasma schnell verließen. Inzwischen hat man jedoch Konfigurationen gefunden, in denen auch im Stellarator die Driftbahnen der (meisten) gefangenen Teilchen geschlossen sind. Eine solche Konfiguration ist im Stellarator W7-X realisiert, der sich gerade in Greifswald im Aufbau befindet. In der obigen Abbildung ist zu erkennen, dass sich dadurch die Diffusion gegenüber klassischen Stellaratoren um mehr als eine Größenordnung reduzieren lässt.

## 7.4 Auswirkungen neoklassischer Effekte auf den Plasmastrom

Neben der Korrekturen des Senkrechttransports durch Stöße gibt es auch wichtige neoklassische Effekte bei Transportprozessen (insbesondere für den Strom) parallel zum Magnetfeld.

Zunächst wenden wir uns der elektrischen Leitfähigkeit zu. Längs des Magnetfelds wird diese durch die bereits früher hergeleitete Spitzerleitfähigkeit  $\sigma_{sp} = (e^2 n_e) / (m_e \nu_{ei})$  beschrieben. Im Torus ergeben sich jedoch Korrekturen: die Zahl der in toroidaler Richtung frei beweglichen

Teilchen ist um den Anteil der gefangenen Teilchen verringert, d. h. die Dichte der Ladungsträger ist  $n_e (1 - (n_t/n_e))$ . Zusätzlich zur Reibung dieser Teilchen mit den Ionen muss man nun auch die Reibung der freien mit den gefangenen Elektronen berücksichtigen (an diese kann, im Gegensatz zu Stößen der freien Elektronen untereinander, Gesamtimpuls abgegeben werden). Die Stoßfrequenz berechnet sich dann zu  $\nu = \nu_{ei} + \nu_{ee,t} \approx \nu_{ei} (1 + n_t/n_e)$ . Dies führt dazu, dass der neoklassische Ausdruck für die Leitfähigkeit gegenüber  $\sigma_{Sp}$  abgesenkt ist:

$$\sigma_{Neo} = \sigma_{Sp} \frac{1 - n_t/n_e}{1 + n_t/n_e} \approx \sigma_{Sp} \left(1 - \frac{n_t}{n_e}\right)^2 = \sigma_{Sp} (1 - \sqrt{2\epsilon})^2. \quad (7.24)$$

Diese Formel wird in den Experimenten betätigt. Ein weiterer wichtiger Effekt ist die Erzeugung eines toroidalen Stromes aufgrund eines Druckgradienten. Diesen sog. *Bootstrap-Strom* wollen wir für den vereinfachten Fall eines Dichtegradienten ( $T = const$ ) anschaulich herleiten. Dazu betrachten wir die in Abb. ?? skizzierten Bananenbahnen.

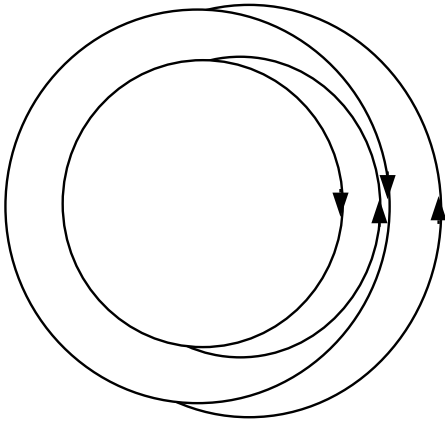


Abbildung 7.8: Zur Herleitung des Bootstrap-Stromes.

Analog zur Herleitung der diamagnetischen Drift ergibt sich auch hier in Anwesenheit eines Dichtegradienten ein Nettostrom, da an einem radialen Ort mehr Teilchen in die eine als in die andere Richtung laufen. So ergibt sich z. B. in der Zeichnung am Berührungspunkt der beiden Bananenbahnen ein Nettostrom in positive poloidale Richtung. Berücksichtigt man, dass wir es in Abb. 7.8 nur mit der poloidalen Projektion der im Wesentlichen in toroidale Richtung verlaufenden Bananenbahn zu tun haben, so erhält man schließlich einen (fast toroidalen) Parallelstrom aufgrund der gefangenen Teilchen

$$j_{gef} \approx e (n_1 - n_2) \sqrt{2\epsilon} v_{\parallel} \sim (n_1 - n_2) \epsilon v_{th}, \quad (7.25)$$

wobei wir im letzten Schritt wiederum von der Kleinheit der Parallelgeschwindigkeit auf der Bananenbahn Gebrauch gemacht haben:  $v_{\parallel} = \sqrt{2\epsilon} v_{\perp} \approx \sqrt{2\epsilon} v_{th}$ . Schätzen wir den Dichteunterschied zwischen den beiden Bananenbahnen durch  $(n_1 - n_2)/w_B = dn/dr$  ab, so erhalten wir

$$j_{gef} \sim \frac{dn}{dr} w_B \epsilon v_{th} \sim \frac{dn}{dr} \sqrt{\epsilon} q r_L v_{th} \sim \frac{dn}{dr} \epsilon^{3/2} \frac{B_{\phi}}{B_{\theta}} \frac{\sqrt{k_B T}}{B} v_{th} \sim \frac{dn}{dr} \frac{T \epsilon^{3/2}}{B_{\theta}}, \quad (7.26)$$

wobei wir die zylindrische Näherung des Sicherheitsfaktors  $q = \frac{r}{R} \frac{B_{\phi}}{B_{\theta}}$  und  $B_{\phi} \approx B$  verwendet haben. Dies ist der aufgrund des Dichtegradienten von den gefangenen Teilchen getragene Parallelstrom.

Den Hauptbeitrag zum Bootstrap-Strom liefern jedoch *freie Elektronen*, die durch Stöße mit gefangenen Elektronen beschleunigt werden. Der Impulsübertrag pro Volumen- und Zeiteinheit (also die Kraftdichte) beträgt dabei etwa

$$f_{gef,e \rightarrow frei,e} \sim \frac{\nu_{ee}}{\epsilon} \frac{m_e j_{gef}}{e}. \quad (7.27)$$

Dadurch entsteht ein Strom  $j_{frei}$ , der sich gerade so einstellt, dass der aufgenommene Impuls durch Stöße wieder abgegeben wird, und zwar bevorzugt an freie Ionen, d. h.  $f_{gef,e \rightarrow frei,e}$  wird im Kräftegleichgewicht gerade kompensiert durch

$$f_{frei,e \rightarrow frei,i} \sim \nu_{ei} \frac{m_e j_{frei}}{e}. \quad (7.28)$$

Aus den Gleichungen (??) und (??) folgt wegen  $\nu_{ee} \sim \nu_{ei}$ , dass der Strom der freien Elektronen um den Faktor  $1/\epsilon$  größer ist als der der gefangenen Elektronen. Für den gesamten Bootstrap-Strom  $j_b$  ergibt sich somit

$$j_b \sim \frac{\epsilon^{1/2}}{B_p} k_B T \frac{dn}{dr}. \quad (7.29)$$

Bei dieser mehr qualitativen Rechnung wurde lediglich der Dichtegradient berücksichtigt. Eine genauere Behandlung zeigt, dass darüberhinaus auch die Temperaturgradienten (kleinere) Beiträge zu  $j_b$  liefern. Im Bananenregime erhält man für  $\epsilon \ll 1$  die Beziehung

$$j_b = \frac{\epsilon^{1/2}}{B_p} \left[ 2.44 k_B (T_e + T_i) \frac{dn}{dr} + 0.69 n k_B \frac{dT_e}{dr} - 0.42 n k_B \frac{dT_i}{dr} \right]. \quad (7.30)$$

Obwohl sich das Vorzeichen von  $j_b$  umkehren kann, fließt der Bootstrap-Strom im Allgemeinen in Richtung des induzierten Plasmastroms  $I_p$  und trägt somit zur Erzeugung des poloidalen Magnetfelds bei. Vor allem wenn es gelingt, im Inneren des Plasmas eine sogenannte *Transportbarriere* mit steilen Dichte- und Temperaturprofilen zu erzeugen, kann der Anteil des Bootstrap-Stroms am Gesamtstrom mehrere 10% erreichen. Damit scheint es prinzipiell möglich, einen Tokamak stationär zu betreiben. Dieses Ziel verfolgt man unter dem Schlagwort "Advanced Tokamaks".



# Kapitel 8

## Anomaler Transport

### 8.1 Fluktuationen in Fusionsplasmen

Wie wir bereits gesehen haben, können die experimentell beobachteten Wärme- und Teilchenflüsse senkrecht zum Magnetfeld im Allgemeinen nicht durch stoßinduzierte Prozesse erklärt werden. Die Differenz zwischen den neoklassischen und den experimentellen Werten wird *anomaler Transport* genannt. Dahinter verbergen sich nach heutiger Auffassung schnelle und kleinskalige (in der Richtung senkrecht zum Magnetfeld) Fluktuationen diverser Plasmaparameter. So misst man beispielsweise durch Streuung elektromagnetischer Wellen, dass die Elektronendichte Schwankungen zeigt, welche durch

$$1kHz \leq f \leq 100kHz \quad (8.1)$$

und  $k_{\perp}a \gg 1$  charakterisiert sind. Die Fluktuationsniveaus betragen dabei  $\tilde{n}_e/n_e \sim 10^{-3} - 10^{-2}$  und nehmen vom Zentrum des Plasmas zum Rand hin zu. Führt man die beiden Längenskalen  $\rho_s \equiv c_s/\Omega_i$  (mit  $c_s^2 = k_B T_e/m_i$ ) und  $L_n \equiv n_e/|\nabla n_e|$  ein, dann lässt sich ferner zeigen, dass

$$k_{\perp}\rho_s \sim 0.1 - 0.3, \tilde{n}_e/n_{e0} \sim (3 - 10) \rho_s/L_n \quad (8.2)$$

gilt. Die parallelen Korrelationslängen liegen im Bereich der Verbindungslänge  $L_c = 2\pi qR_0$  oder auch darüber. D. h. die Fluktuationen besitzen eine extrem anisotrope Struktur mit einem Verhältnis von paralleler zu senkrechter Ausdehnung von etwa  $10^3 - 10^4$ . Ähnliche Abschätzungen ergeben sich für die Schwankungen der Elektronentemperatur, gemessen durch die emittierte Elektronenzyklotronstrahlung. Die senkrechten Magnetfeldfluktuationen sind mehr oder weniger isotrop und übertreffen die parallelen bei weitem. Im Allgemeinen findet man  $\tilde{B}_{\perp}/B_0 \sim 10^{-5} - 10^{-4}$ , wobei das Fluktuationsniveau vom Zentrum des Plasmas zum Rand hin abnimmt. Man vermutet dahinter eine Korrelation zwischen  $\tilde{B}_{\perp}/B_0$  und  $\beta$ . In kleineren Tokamaks wurden außerdem Schwerionenstrahlen eingesetzt, um die Schwankungen des elektrostatischen Potentials zu untersuchen. Die meisten Messungen im Plasmainneren beziehen sich jedoch auf  $\tilde{n}_e$ . Nur am äußersten Plasmarand ist es mit Hilfe der im 1. Semester diskutierten Langmuir-Sonden möglich, auch über  $\tilde{T}_e$  und  $\tilde{\phi}$  genauere Informationen zu erhalten.

## 8.2 Fluktuationsinduzierter Transport

In Gegenwart fluktuierender elektrischer und magnetischer Felder weichen die Teilchen von ihren ungestörten Trajektorien ab. Die radiale Variation eines Elektrons<sup>1</sup> ist gegeben durch

$$\tilde{\nu}_r = \tilde{\nu}_{Er} + \nu_{\parallel} \tilde{B}_r / B_0. \quad (8.3)$$

Hierbei ist  $\tilde{\nu}_{Er}$  die radiale Komponente der  $E \times B$ -Geschwindigkeit und der zweite Term auf der rechten Seite entspricht der radialen Projektion von Teilchen, die ausgelenkten Magnetfeldlinien folgen. Die Verteilungsfunktion der Elektronen bestehe aus einem Maxwell'schen Anteil

$$f_{e0} = n_{e0} \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T_{e0}} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m\nu^2}{2k_B T_{e0}} \right] \quad (8.4)$$

und einer kleinen Störung  $\tilde{f}_e$ ,

$$f_e = f_{e0} + \tilde{f}_e, \quad \tilde{f}_e \ll f_{e0}. \quad (8.5)$$

Für den radialen Teilchenfluss aufgrund der Fluktuationen ergibt sich damit

$$\Gamma \equiv \int \tilde{\nu}_r \tilde{f}_e d^3\nu = \tilde{\nu}_{Er} \int \tilde{f}_e d^3\nu + (\tilde{B}_r / B_0) \int \nu_{\parallel} \tilde{f}_e d^3\nu. \quad (8.6)$$

Linearisiert man bei der Bildung der Momente der Verteilungsfunktion (siehe Kapitel "Flüssigkeitsbeschreibung von Plasmen") [hierbei haben wir  $\vec{u} \rightarrow u_{\parallel} \vec{b}$  ersetzt], so erhält man

$$\int \tilde{f}_e d^3\nu = \tilde{n}_e \quad (8.7)$$

und

$$\int \nu_{\parallel} \tilde{f}_e d^3\nu = n_{e0} \tilde{u}_{e\parallel}. \quad (8.8)$$

Führt man nun eine raumzeitliche Mittelung durch und bezeichnet diese mit eckigen Klammern, dann ergibt sich

$$\langle \Gamma \rangle = \langle \tilde{n}_e \tilde{\nu}_{Er} \rangle + n_{e0} \langle \tilde{u}_{e\parallel} \tilde{B}_r \rangle / B_0. \quad (8.9)$$

Hierbei gilt

$$\langle \tilde{n}_e \rangle = \langle \tilde{u}_{e\parallel} \rangle = \langle \tilde{\nu}_{Er} \rangle = \langle \tilde{B}_r \rangle = 0. \quad (8.10)$$

Daraus folgt, dass der Teilchentransport unmittelbar mit den Korrelationsfunktionen  $\langle \tilde{n}_e \tilde{\nu}_{Er} \rangle$  und  $\langle \tilde{u}_{e\parallel} \tilde{B}_r \rangle$  zusammen hängt. Sind diese Ausdrücke klein, dann ergibt sich selbst bei relativ

<sup>1</sup>Bei den Ionen spielt darüberhinaus der endliche Gyrationradius eine Rolle. Der resultierende Teilchentransport entspricht jedoch stets dem der Elektronen (Ambipolarität).

hohen Fluktuationsniveaus kein radialer Transport. Diese fundamentale Einsicht über die Natur des anomalen Transports ist im Folgenden stets im Hinterkopf zu behalten. Andere radiale Flüsse werden analog zu Gleichung (??) definiert.

Wie beim klassischen Transport werden in der Regel Diffusionskoeffizienten  $D$  und  $\chi$  eingeführt, um den anomalen Transport zu quantifizieren. Es gibt jedoch keine einfachen Zusammenhänge zwischen  $D$ ,  $\chi_e$  und  $\chi_i$ ; außerdem können diese Diffusivitäten sogar negative Werte annehmen.

### Woher kommen die Fluktuationen?

Es ist jetzt also klar, dass und wie Fluktuationen zu einem radialen Transport von Materie oder Energie führen können. Wir sind bislang allerdings eine Antwort auf die Frage schuldig geblieben, woher die Fluktuationen überhaupt kommen. Wie wir im Folgenden sehen werden, sind diverse Mikroinstabilitäten für den anomalen Transport verantwortlich. Getrieben von Dichte- bzw. Temperaturgradienten, wachsen sie exponentiell in der Zeit an bis ihre Amplituden so groß sind, dass nichtlineare Effekte einsetzen. Letztere führen zur Sättigung, d. h. der Ausbildung eines quasistationären Zustands fernab vom thermodynamischen Gleichgewicht. Dabei wird dem Hintergrundplasma freie Energie entzogen, über Kaskadenprozesse umverteilt und schließlich dissipiert. Diese Art nichtlinearer Dynamik in offenen Systemen mit vielen angeregten Freiheitsgraden nennt man *Turbulenz*. Dabei ähneln turbulente Strömungen in Magnetoplasmen denen in quasi-zweidimensionalen Fluidsystemen. Dazu zählen z. B. Seifenfilme, Ozeane und planetare Atmosphären.

Ein erstes Indiz, dass Mikroturbulenz in der Tat die Ursache für den anomalen Transport in Fusionsplasmen ist, liefert folgende Überlegung. Nehmen wir an, die Turbulenz wird durch einen endlichen Dichtegradienten getrieben und sorgt ihrerseits für einen radial auswärts gerichteten Teilchentransport. Während das mittlere Dichteprofil sich zeitlich kaum ändert, ist es überlagert von schnellen, kleinskaligen Fluktuationen. Dabei kann es trotz  $\tilde{n}_e \ll n_{e0}$  dazu kommen, dass in einem radial eng begrenzten Gebiet der Gradient der Gesamtdichte (und damit auch der Turbulenzantrieb) verschwindet<sup>2</sup>. Damit sinkt der turbulente Transport und es baut sich wieder ein endlicher Dichtegradient auf. Die Fluktuationsamplitude lässt sich demgemäß abschätzen durch  $|\nabla \tilde{n}_e| \sim |\nabla n_{e0}|$  mit  $|\nabla \tilde{n}_e| \sim k_\perp \tilde{n}_e$  und  $|\nabla n_{e0}| \sim n_{e0}/L_n$ . Es ergibt sich

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_{e0}} \sim \frac{1}{k_\perp L_n} = \frac{1}{k_\perp \rho_s} \frac{\rho_s}{L_n}. \quad (8.11)$$

D. h. die experimentell gemessenen Werte für  $k_\perp \rho_s$  und  $\tilde{n}_e/n_{e0}$  [siehe Gleichung (??)] erweisen sich im Rahmen dieses einfachen Modells als selbstkonsistent.

### Sind die Fluktuationen groß genug?

Wegen  $\rho_s \sim$  einige mm und  $L_n \sim$  einige m gilt (zumindest im Inneren des Plasmas)  $\tilde{n}_e/n_{e0} \ll 1$ . Ist es nun möglich, die beobachteten Werte von  $D^\perp \sim 1\text{m}^2/\text{s}$  trotz kleiner Fluktuationsniveaus solchen turbulenten Strömungen zuzuschreiben? Um diese wichtige Frage zu beantworten, schätzen wir den anomalen Transport ab. Ist die parallele Dynamik der Elektronen schnell im Vergleich zur senkrechten Turbulenz, dann wird die Abweichung von der linearisierten Boltzmann-Beziehung,  $\tilde{n}_e/n_{e0} \sim e\tilde{\phi}/k_B T_{e0}$ , relativ klein sein (Wie bei Behandlung der Quasineutralität im Kapitel "Einführung in die Plasmaphysik" diskutiert, bildet sich beim Versuch die Quasineutralität zu stören eine Boltzmann-Verteilung der Dichte im Potential aus:

<sup>2</sup>Eine temporäre Inversion des Dichteprofiles ist zwar ebenfalls möglich, aber relativ unwahrscheinlich.

$\frac{n_{e0} + \tilde{n}_e}{n_{e0}} = \frac{\exp(\phi_0 + \tilde{\phi})/k_B T_{e0}}{\exp(\phi_0/k_B T_{e0})} = \exp(\tilde{\phi}/k_B T_{e0})$ . Mit  $\tilde{\nu}_{Er} \sim k_{\perp} \tilde{\phi}/B_0$  und (??) folgt deshalb für den elektrostatischen Anteil des Teilchentransports:

$$\langle \Gamma_{es} \rangle = \langle \tilde{n}_e \tilde{\nu}_{Er} \rangle \sim \frac{1}{k_{\perp} \rho_s} \frac{\rho_s^2 c_s}{L_n} \frac{n_{e0}}{L_n} \quad (8.12)$$

bzw.

$$D_{es}^{\perp} \sim (3 - 10) \frac{\rho_s^2 c_s}{L_n}. \quad (8.13)$$

Setzt man typische Werte für  $\rho_s, c_s$  ( $\leq 10^6 m/s$ ) und  $L_n$  ein, dann zeigt sich, dass fluktuationsinduzierte Prozesse durchaus in der Lage sind, den anomalen Transport in Fusionsexperimenten zu erklären. Man sollte allerdings betonen, dass Gleichung (??) lediglich eine obere Grenze für  $D^{\perp}$  liefert. Wie schon gesagt, kommt es letztlich auf die Korrelationsfunktion  $\langle \tilde{n}_e \tilde{\nu}_{Er} \rangle$  an. Sind die Elektronen z. B. streng adiabatisch,  $\tilde{n}_e/n_{e0} = e\tilde{\phi}/k_B T_{e0}$ , dann verschwindet der Transport exakt. Das liegt daran, dass in diesem Fall die  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift entlang von geschlossenen Linien konstanter Dichte verläuft. Es wird also stets genauso viel Plasma in positiver wie in negativer radialer Richtung über eine gegebene Flussfläche konvektiert.

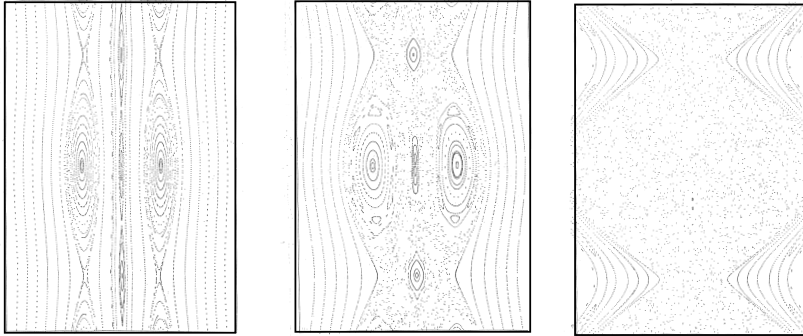


Abbildung 8.1: Das Aufbrechen magnetischer Flächen in Gegenwart von kleinen Störströmen: (a) Inselbildung, (b) beginnende Stochastisierung, (c) komplette Stochastisierung.

Diejenigen Anteile von  $\Gamma$  bzw.  $Q$ , die mit Fluktuationen des Magnetfelds verbunden sind, bezeichnet man auch als “elektromagnetisch”. Können auch sie einen nennenswerten Beitrag zum Transport leisten? Wie kommen sie überhaupt zustande? In magnetisch eingeschlossenen, axialsymmetrischen Fusionsplasmen geht man im Allgemeinen davon aus, dass die Feldlinien magnetische Flächen aufspannen. Es ist aber bekannt, dass schon kleine Störströme dazu führen können, dass diese Flußflächen “aufbrechen”. Abbildung 8.1 zeigt ein entsprechendes Beispiel. Hierbei wurde angenommen, dass an zwei radialen Positionen eine Störung der Stromdichte mit einer bestimmten poloidalen Modenzahl  $m$  vorliegt. Die Abbildung zeigt Poincaré-Plots in einer festen poloidalen Ebene bei Erhöhung der Störströme. Zunächst bilden sich *magnetische Inseln*, d. h. geordnete Substrukturen, welche den radialen Transport durch eine Art Kurzschlusseffekt deutlich erhöhen. Dann erfolgt eine zunehmende Stochastisierung der Feldlinien und damit auch der Teilchenbahnen; der Plasmaeinschluss ist stark vermindert. Man kann den elektromagnetischen Transport grob abschätzen, indem man annimmt, ein Teilchen führt einen Random-Walk mit einer radialen Schrittweite von  $\Delta x \sim (\tilde{B}_{\perp}/B_0) \lambda_f$  aus, wobei  $\lambda_f = \nu_t/\nu$  seine mittlere freie Weglänge beschreibt. Daraus ergibt sich



$$D_{em}^\perp = \left( \tilde{B}_\perp / B_0 \right)^2 D^\parallel. \quad (8.14)$$

Wie sich zeigt, genügen wegen  $D^\parallel \ll D^\perp$  bereits kleine Fluktuationsebenen von  $\tilde{B}_\perp / B_0 \sim 10^{-5}$ , um den anomalen Transport zu erklären<sup>3</sup>. Dies entspricht in etwa den experimentell gemessenen Werten. Doch wie schon betont, gibt auch hier Gleichung (??) nur eine obere Grenze an. Viele numerische Untersuchungen deuten indessen darauf hin, dass der elektromagnetische Beitrag zum Transport im Allgemeinen recht klein ist. Wir konzentrieren uns im Folgenden also auf den elektrostatischen Transport.

### 8.3 Driftwellen

Um besser zu verstehen, wie Mikroinstabilitäten entstehen, wollen wir ein konkretes Beispiel diskutieren, nämlich die sogenannten *Driftwellen*. Dazu benutzen wir ein einfaches Flüssigkeitsmodell und beschränken uns auf ein homogenes Magnetfeld  $B = B\hat{z}$ . Vernachlässigt man Trägheitseffekte und Stöße, dann gilt für Elektronen das Kräftegleichgewicht

$$\nabla p_e + en_e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0. \quad (8.15)$$

Im elektrostatischen Grenzfall ( $\beta \ll m_e/m_i$ ) dürfen Schwankungen des Magnetfelds vernachlässigt werden; außerdem sei  $\vec{E} = -\nabla\tilde{\phi}$ . Desweiteren nehmen wir an, dass die Elektronen aufgrund der hohen parallelen Wärmeleitfähigkeit isotherm sind, sodass der Elektronendruck als  $p_e = n_e k_B T_{e0}$  mit  $n_e = n_{e0} + \tilde{n}_e, \tilde{n}_e \ll n_{e0}$  geschrieben werden kann. Wir setzen voraus, dass die Hintergrunddichte (nur) in der  $x$ -Richtung variiert,  $\nabla n_{e0} = -(n_{e0}/L_n)\hat{x}$ , und linearisieren. Die parallele Komponente von Gleichung (??) liefert die Boltzmann-Beziehung

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_{e0}} = \frac{e\tilde{\phi}}{k_B T_{e0}}, \quad (8.16)$$

während die Vektormultiplikation mit  $B$  auf

$$\vec{v}_\perp = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{\nabla p_e \times \vec{B}}{en_{e0}B^2} \equiv \vec{v}_E + \vec{v}_{de} \quad (8.17)$$

führt. Hierbei bezeichnet  $\vec{v}_{de}$  die diamagnetische Driftgeschwindigkeit der Elektronen. Gleichung (??) wird ergänzt durch die (linearisierte) Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \tilde{n}_e + \nabla \cdot (n_{e0} \vec{v}_\perp) = 0. \quad (8.18)$$

Wegen  $\nabla \cdot (n_{e0} \vec{v}_{de}) \propto \nabla \cdot (\nabla p_e \times \hat{z}) = 0$  und  $\nabla \cdot \vec{v}_E \propto \nabla \cdot (\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}) = 0$  folgt

$$\partial_t \tilde{n}_e + \vec{v}_E \cdot \nabla n_{e0} = \partial_t \tilde{n}_e - (n_{e0}/L_n) \nu_{Ex} = 0. \quad (8.19)$$

Mit Hilfe des Ansatzes  $\tilde{n}_e \propto \tilde{\phi} \propto \exp(ik \cdot x - i\omega t)$  und Gleichung (??) erhalten wir schließlich

<sup>3</sup>Diese Aussage gilt nur für das Innere des Plasmas; am Rand sind die gemessenen Feldstörungen zu klein.

$$\omega_D = (k_y \rho_s) (c_s / L_n). \quad (8.20)$$

Wegen  $|\nu_{de}| = \rho_s c_s / L_n$  gilt

$$\frac{\omega_D}{k_y} = \frac{\partial \omega_D}{\partial k_y} = |\nu_{de}|, \quad (8.21)$$

d. h. wir haben es mit einer Welle zu tun, welche in die  $y$ -Richtung propagiert. Dabei ist sowohl die Phasen- als auch die Gruppengeschwindigkeit durch die diamagnetische Driftgeschwindigkeit der Elektronen gegeben. Der physikalische Mechanismus dieser *Driftwelle* ist in Abbildung 8.2 skizziert. Eine in  $y$ -Richtung periodische Dichtestörung ist aufgrund der schnellen parallelen Elektronendynamik mit einer entsprechenden Potentialstörung verbunden. Die resultierende  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift konvektiert - mit einer Phasenverschiebung von genau  $90^\circ$  - dichteres (dünnere) Plasma in die positive (negative)  $x$ -Richtung, sodass sich die Welle in  $y$ -Richtung fortbewegt.

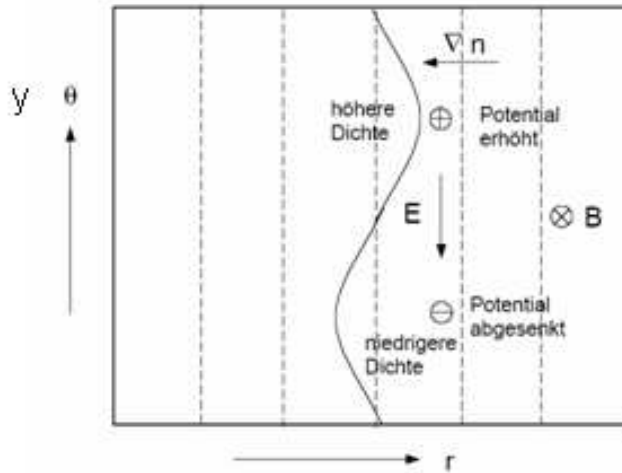


Abbildung 8.2: Zum Mechanismus der Driftwelle. Dabei ist  $r \propto x$  die radiale und  $\theta \propto y$  die "poloidale" Koordinate.

Interessanterweise lässt sich das Ergebnis (??) im Licht von Gleichung (??) reinterpretieren. Geht man von einem Random-Walk-Modell aus, dessen charakteristische Längen- und Zeitskalen denen einer Driftwelle entsprechen, dann ergibt sich nämlich

$$D^\perp \sim \frac{\omega_D}{k_y^2} = \frac{1}{k_\perp \rho_s} \frac{\rho_s^2 c_s}{L_n} \sim (3 - 10) \frac{\rho_s^2 c_s}{L_n}. \quad (8.22)$$

## 8.4 Destabilisierung und nichtlineare Sättigung

Problematisch ist, dass im Rahmen des oben beschriebenen Modells die Driftwellen neutral stabil sind, d. h. sie werden weder gedämpft noch wachsen sie an. Das liegt daran, dass wir bislang keine dissipativen Effekte berücksichtigt haben. Man kann zeigen, dass sowohl Stöße als auch Landau-Resonanzen zu einer linearen Antwort des Plasmas auf Potentialstörungen führen, die in der Form

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_{e0}} = \frac{e\tilde{\phi}}{k_B T_{e0}} (1 - i\delta) \quad (8.23)$$

mit  $\delta > 0$  geschrieben werden kann. Mit dieser Modifikation ergibt sich

$$\omega_D \rightarrow \frac{\omega_D}{1 - i\delta} \approx \omega_D (1 + i\delta). \quad (8.24)$$

Dissipative Driftwellen wachsen also exponentiell in der Zeit an. Dies tun sie solange, bis die  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Nichtlinearität eine Rolle zu spielen beginnt. Dies ist dann der Fall, wenn die beiden Terme

$$\partial_t \tilde{n}_e + v_E \cdot \tilde{n}_e = \dots \quad (8.25)$$

vergleichbar sind:

$$\gamma \sim \rho_s c_s k_{\perp}^2 \left( \frac{e\tilde{\phi}}{T_{e0}} \right) \text{ bzw. } \frac{e\tilde{\phi}}{T_{e0}} \sim (\gamma/\omega_D) / (k_{\perp} L_n). \quad (8.26)$$

Für  $\gamma/\omega_D \sim 1$  und  $\tilde{n}_e/n_{e0} \sim e\tilde{\phi}/T_{e0}$  ergibt sich Gleichung (??).  $\gamma$  gibt hierbei den Imaginärteil der Frequenz (d. h. die Anwachsrate) an. Um die statistischen Eigenschaften der voll entwickelten Turbulenz zu untersuchen greift man auf numerische Lösungen der nichtlinearen Grundgleichungen zurück. Solche Computersimulationen sind zum Teil sehr aufwendig und haben in den letzten 10-15 Jahren zu enormen Fortschritten im Verständnis des anomalen Transports geführt. Ziel dieser Forschungsrichtung ist es, Vorhersagen für zukünftige Experimente machen zu können sowie Wege zur Turbulenzkontrolle aufzuzeigen. Dabei handelt es sich um Kernprobleme der modernen Plasmaphysik.

## 8.5 ITG-Moden

Besonders wichtig sind die nichtlinearen Effekte am Plasmarand, wo die Gradientenlängen sehr klein werden. Im Plasmazentrum kann man jedoch bereits aus der Physik der linearen Instabilitäten etwas lernen. Die für das Plasmazentrum wichtigste Instabilität ist die sogenannte toroidale ITG-(Ionen-Temperatur-Gradient getriebene) Instabilität. Wir starten von einer periodischen Störung der Ionentemperatur auf einer Flussfläche. Im toroidalen Magnetfeld driften die Teilchen wegen der Krümmungsdrift und  $\nabla B$ -Drift senkrecht nach oben bzw. unten (siehe Kapitel "Teilchenbewegung in elektrischen und magnetischen Feldern"). Diese Drift ist abhängig von der thermischen Geschwindigkeit der Teilchen. Wenn die Magnetfeldgeometrie so gewählt wird, dass die Ionen nach oben driften, sammeln sich wegen der höheren Driftgeschwindigkeit mehr Ionen gerade oberhalb einer heißeren Region an. Unterhalb der heißen Region findet man dagegen ein Minimum in der Ionendichte.

Quasineutralität fordert eigentlich  $n_e = n_i$ , aber wegen der größeren Mobilität der Elektronen, versuchen diese, die Dichtestörung auf der Flussfläche auszugleichen. Dabei baut sich ein elektrisches Feld auf (Boltzmann-Relation!). Dieses elektrische Feld verursacht eine  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift, die gerade so gerichtet ist, dass sie auf der Niedrigfeldseite Plasma von außen (größeres R) in Gebiete der ursprünglich niedrigeren Temperatur und Plasma von innen (kleineres R) in Gebiete

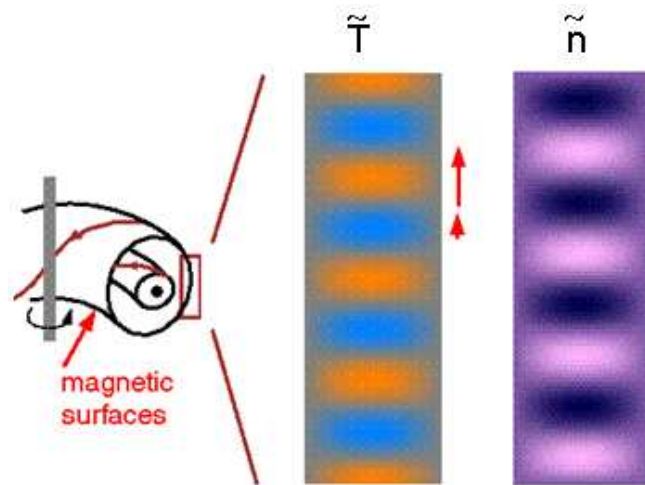


Abbildung 8.3: Aus einer Temperaturstörung auf einer magnetischen Fläche folgt wegen der Driften im inhomogenen Magnetfeld eine Dichtestörung.

ursprünglich höherer Temperatur bringt. Dabei wird also auf der Niedrigfeldseite die anfängliche Temperaturstörung verstärkt. Auf der Hochfeldseite ist die Richtung der  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift natürlich gleich. Hier bedeutet allerdings eine Drift von größeren zu kleineren  $R$  die Bewegung von heißerem Plasma aus dem Zentrum in Richtung Rand. Daher wird auf der Hochfeldseite die anfängliche Temperaturstörung unterdrückt. Die hier betrachtete Instabilität wird vom Gradienten der Ionentemperatur getrieben (je höher der Gradient der Ionentemperatur desto größer die beschriebenen Effekte). Sie tritt nur in toroidalen Einschlussgeometrien auf.

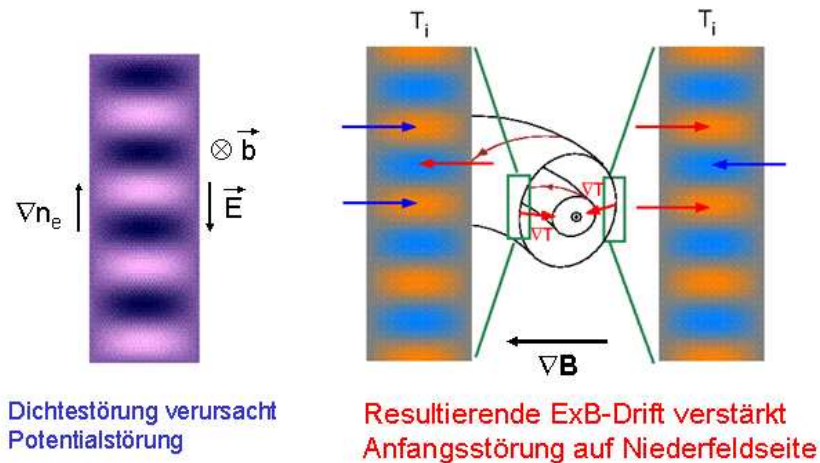


Abbildung 8.4: Eine anfängliche Temperaturstörung wird auf der Niedrigfeldseite verstärkt.

Wir wollen hier nicht die Anwachsraten für diese Instabilität ableiten, sondern ihre Auswirkungen diskutieren.

Die Berechnung der linearen Anwachsrates führt auf einen sogenannten kritischen Gradienten. Für einen geringen Gradienten der Ionentemperatur ist die ITG-Mode stabil. Erst oberhalb eines kritischen logarithmischen Gradienten

$$\frac{1}{L_T} = \left| \frac{\nabla T}{T} \right| > \frac{1}{L_{T,cr}}$$

wächst sie exponentiell ( $\sim e^{\gamma t}$ ) an (siehe Abbildung).

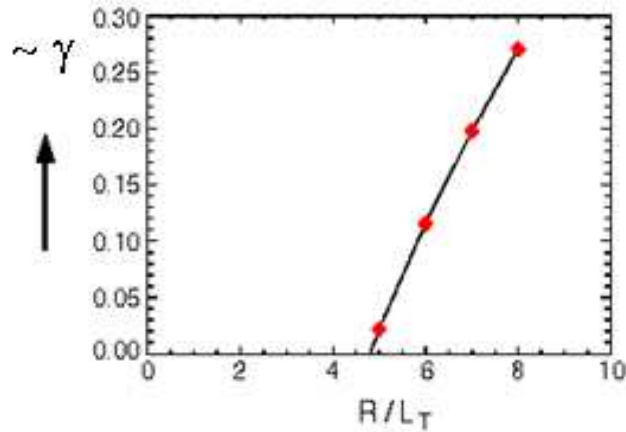


Abbildung 8.5: Anwachsrates der ITG-Mode als Funktion des logarithmischen Gradienten der Ionentemperatur.

Wie bereits diskutiert sind die nichtlinearen Effekte für diese Mode ausreichend gering, sodass auch der Wärmetransport ein ähnliches Verhalten zeigt (Nichtlineare Effekte führen dazu, dass der kritisch logarithmische Gradient zu etwas höheren Werten verschoben wird.).

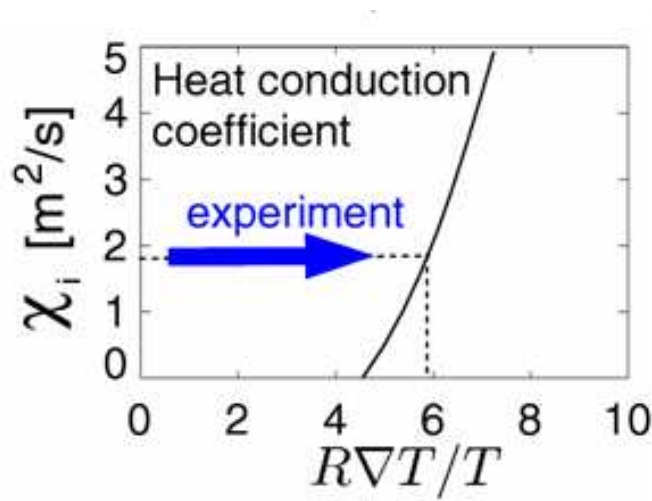


Abbildung 8.6: Schematische Darstellung der Abhängigkeit des Wärmetransportes vom logarithmischen Gradienten der Ionentemperatur.

Oberhalb des kritischen Temperaturgradienten führt weitere Heizung also vor allem zu einer Erhöhung des Wärmetransportes, aber nur zu einer sehr geringen Erhöhung der Temperatur. Wenn der kritisch logarithmische Temperaturgradient aber nicht wesentlich überschritten werden kann, bedeutet das ein exponentielles Verhalten des Temperaturgradienten

$$\frac{d \ln T}{dr} = \frac{\nabla T}{T} = -\frac{1}{L_{T,cr}}$$

$$T(a) = T(b) \exp\left(\frac{b-a}{L_{T,cr}}\right).$$

Insbesondere ist die Zentraltemperatur dann nur durch die Randtemperatur bestimmt. Ein solches Verhalten wird über weite Teile des Temperaturprofils auch tatsächlich beobachtet.

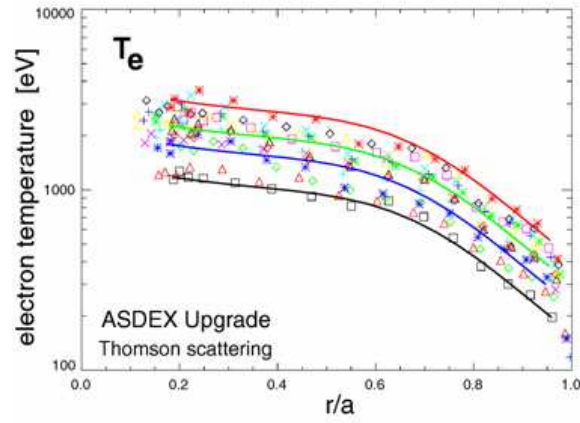


Abbildung 8.7: Selbstähnliche Temperaturprofile werden oft in Fusionsplasmen beobachtet.

# Kapitel 9

## Plasmaheizung

Wesentliches Element der Plasmaphysik - speziell der Fusionsplasmaphysik - ist die Plasmaerzeugung und -heizung. So lassen sich Hochtemperaturplasmen (selbstverständlich) nur mit Hilfe starker Leistungszufuhr aufbauen und aufrechterhalten. Im Fall der Fusionsplasmaphysik (Fusionsreaktor) sind typischerweise Leistungen zwischen 50-100MW nötig, um die Fusionsreaktion zu zünden und damit die Selbstheizung ( $\alpha$ -Heizung) einzuleiten. Diese selbst erreicht dann typisch 300-600MW (d. h. 20% von typ. 1500-3000MW Reaktorleistung). In den gegenwärtigen Fusionsexperimenten ist die Aufgabe an die Plasmaheizung nicht nur, das Plasma auf reaktorrelevante Temperaturen (typ. einige keV) aufzuheizen, sondern auch ersatzweise (da hier keine wesentliche Fusionsheizung!) die  $\alpha$ -Heizung zu simulieren. Für alle diese Aufgaben (Fusionsexperimente, Fusionsreaktor) stehen verschiedene Heizverfahren zur Verfügung, die im Folgenden näher diskutiert werden sollen. Zuvor sei noch angemerkt, dass die **ohmsche Heizung** (Tokamak) zwar sehr wirksam ist, um ein kaltes Startplasma aufzubauen und aufzuheizen, wegen des mit der Temperatur stark abnehmenden Plasmawiderstandes ( $R \propto T_e^{-3/2}$ ) lassen sich mit der ohmschen Heizung (OH) aber keine extrem hohen Temperaturen und insbesondere die Zündung der Fusionsreaktion nicht erreichen. Auch in großen Tokamaks mit MA-Strömen, aber nur 0,05...0,1 Volt Umfangsspannung sind mit der resultierenden OH-Leistung ( $< 1$ -2MW) nur Plasmatemperaturen von maximal 1-3keV erreichbar. Damit werden effizientere Heizverfahren als OH erforderlich. Diese sogenannten **Zusatzheizverfahren** sind zu unterscheiden nach ihren spezifischen Eigenschaften, nämlich:

- ICRH                                      Ionenheizung (auch: Stromtrieb)
  - NBI                                        Ionenheizung + Teilchenzufuhr (auch: Stromtrieb)
  - ECRH                                      Elektronenheizung (auch: Stromtrieb)
  - LH                                         Elektronenheizung + Stromtrieb
- und (Reaktor):
- $\alpha$ -Heizung                              Elektronen (vorwiegend)

(NBI steht für Neutralteilcheninjektion, englisch: "Neutral Beam Injection").

Entsprechend dieser Aufstellung stehen verschiedene Möglichkeiten der Plasmaheizung zur Verfügung, um in Fusionsexperimenten spezielle Transportfragen zu untersuchen (Größe des Beitrags der Ionen- bzw. Elektronenwärmeleitung, Verhalten schneller Teilchen) oder (lokal)

Plasmaströme zu treiben. Durch Kombination von Ionen- und Elektronenheizung kann insbesondere  $T_e \approx T_i$  eingestellt werden, was der Reaktorsituation entspricht. Um ein Fusionsplasma zu zünden ist es wiederum vorteilhaft, zunächst die Ionen zu heizen, um so (bei  $T_i > T_e$ ) die Fusionsreaktion optimal einzuleiten. Die Fusionsheizung (3,5MeV- $\alpha$ -Teilchen) selbst geht primär auf die Elektronen, solange  $v_\alpha \geq v_{the}$  ist. Über den Elektronen-Ionen Energieübertrag  $P_{ei}$  werden dann die Ionen geheizt, wobei wegen  $\tau_{ei} \ll \tau_E$  sich in etwa  $T_i \approx T_e$  einstellt.

## 9.1 Neutralteilchen-Injektion (NBI)

Wichtiges (und zugleich einfaches) Heizverfahren ist die Injektion energiereicher Teilchen mit  $E_{kin} \gg kT$ . So wie energiereiche, geladene Teilchen aber nicht aus einem magnetisch eingeschlossenen Plasma herauslaufen können, können von außen kommende, geladene Teilchen auch nicht in das von Magnetfeldern eingeschlossene Plasma eindringen. Wohl aber können energetische Neutralteilchen ohne Weiteres in das Plasma eindringen, wo sie dann auf zwei Weisen eingefangen werden können: 1) Ionisation durch Elektronenstoß und 2) Einfang nach Umladungsstoß (*Energetisches Neutralteilchen trifft auf Plasma-Ion und überträgt die Ladung. Das entstandene hochenergetische Ion gibt seine Energie an das Hintergrundplasma ab, das nun neutralisierte thermische Plasma-Ion wird sofort ionisiert und wieder eingeschlossen. Beide Prozesse 1) und 2) laufen mit etwa gleicher Wahrscheinlichkeit ab*).

Die Absorption der eingeschlossenen Neutralteilchen erfolgt also gemäß:

- 1)  $e + n_{schnell} \rightarrow 2e + i_{schnell}$
- 2)  $n_{schnell} + i_{therm.} \rightarrow i_{schnell} + n_{therm.}$

Dies ist das Prinzip der Plasmaheizung durch **Neutralteilchen-Injektion** ("Neutral Beam Injektion"/NBI), ein mittlerweile weit entwickeltes Heizverfahren, das an praktisch allen großen Fusionsexperimenten eingesetzt wird. Die einfache Funktionsweise der NBI wird in der folgenden Abbildung erläutert:

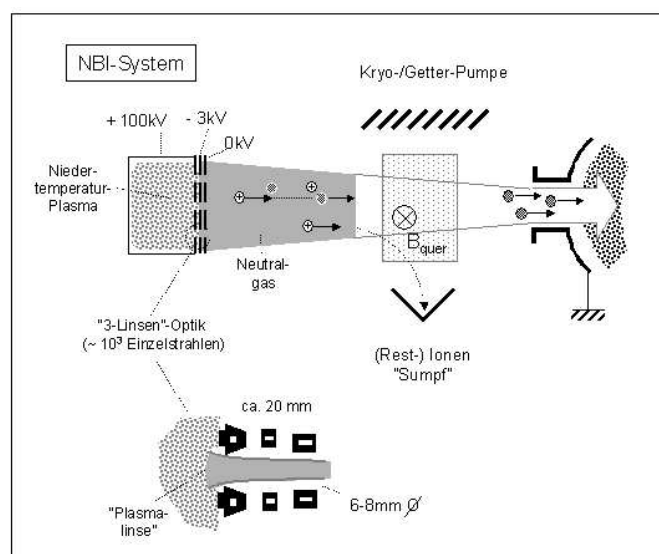


Abbildung 9.1: Funktionsweise der Heizung durch Neutralteilcheneinschluss.

Gemäß der Abbildung wird ein Niedertemperaturplasma über eine Niederdruck-Bogenentladung



erzeugt (Glühfilament als Elektronen-emittierende Kathode, ähnlich Leuchtstofflampe!). In neueren Systemen wird stattdessen auch eine HF-Entladung eingesetzt (Kostenvorteile der HF-Entladung, geringe Lebensdauer des Glühfilaments von nur wenigen Stunden!). Aus diesem Plasma werden dann Ionen extrahiert und über eine Vielzahl von parallelen elektrostatischen Linsensystemen (vgl. Detailbild) als Einzelstrahlen in den Torusport abgebildet. Wesentlich mitbestimmend bei der Abbildung ist dabei auch die "Plasmalinse", d. h. die sich im Plasma ausbildende konkave Kontur der Plasmarandschicht. Bei vorgegebener Extraktionsspannung muss eine zugehörige, sehr homogene Plasmadichte über den gesamten Extraktionsquerschnitt der Quelle (typ.  $0,2\text{m}^2$ ) eingestellt werden. Beim Durchgang durch einen Neutralgashintergrund (dazu reicht in der Regel das aus der Niederdruckentladung austretende Neutralgas) werden die Ionen über einen Umladungsstoß (teil-) neutralisiert. Die Neutralteilchen (vormals Ionen) laufen entsprechend der Optik weiter, die verbliebenen Ionen müssen durch ein geeignetes Quermagnetfeld ausgelenkt und aufgefangen werden. (Sie würden anderenfalls bei Eintritt in das Torusfeld konzentriert auf die Wand fokussiert!). Zugleich muss durch starkes Pumpen verhindert werden, dass das ausströmende (kalte) Neutralgas in den Torus einfließt. Dazu installierte Kryo- oder Titangetterpumpen müssen ein Saugvermögen von über 1 Million Liter/s erreichen.

Ein Problem der Neutralteilcheninjektion ist die Notwendigkeit, in künftigen Fusionsanordnungen wesentlich höhere Teilchenenergien zu erreichen. Maßgebliche Größe ist dabei die beim Einschuss zu überwindende Flächendichte  $n_e \cdot a$ .

Wie in der nachfolgenden Abbildung gezeigt, geht die Umladungsausbeute für positive Ionen oberhalb  $100\text{keV/AMU}$  ("atomic mass unit") drastisch zurück. Einen Ausweg bilden negative Wasserstoffionen, bei denen das locker anhaftende Elektron bis hin zu den höchsten Energien sehr leicht "abgestreift" werden kann.

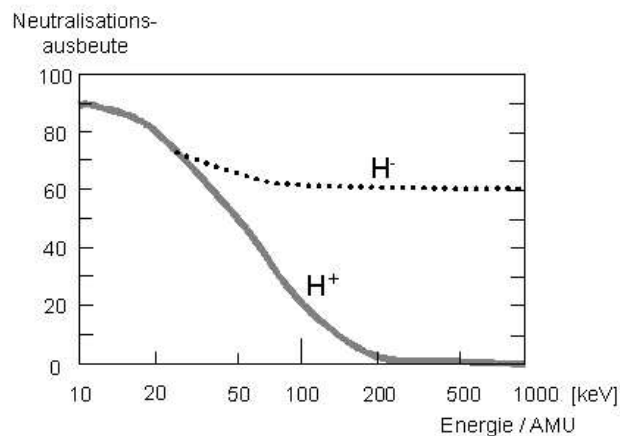


Abbildung 9.2: Neutralisationsausbeute in % von  $H^+$  und  $H^-$  in Abhängigkeit von ihrer Energie.

Die Herstellung und Extraktion negativer Wasserstoffionen ist aber erheblich komplizierter und aufwendiger als die von positiven Ionen<sup>1</sup>. Entsprechende Negativ-Ionenquellen befinden sich zur Zeit noch in Entwicklung.

<sup>1</sup>Im Quellenplasma bereitet das nur mit  $0,7\text{eV}$  gebundene Elektron Schwierigkeiten, da bereits Elektronentemperaturen von  $1\text{-}2\text{eV}$  ausreichen, um den negativen Wasserstoff wieder zu zerstören. Weiterhin müssen bei der Extraktion die (viel beweglicheren) Elektronen zurückgehalten werden. Dies geschieht durch geeignete Quermagnetfelder.

## 9.2 Wellenheizung

Elektromagnetische Wellen ergeben weitere, sehr umfassende Möglichkeiten der Plasmaheizung und - gegebenenfalls - des “*nicht-induktiven Stromtriebs*”. Die Grundlagen der Wellenausbreitung im Plasma waren im Kapitel “Wellen im Plasma” bereits ausführlicher besprochen worden.

### 9.2.1 Dämpfung von Wellen

Hier wollen wir zunächst die Dämpfung von Wellen im Plasma behandeln, die für die Plasmaheizung der wesentliche Prozess ist. Man unterscheidet die folgenden Mechanismen der Wellenabsorption:

1. Stoßdämpfung
2. Stochastische (“stoßfreie”) Dämpfung
3. Cyclotrongdämpfung (“heiße Theorie”)
4. Landaudämpfung

#### 1) Stoßdämpfung

Die Dämpfung von HF-Feldern bzw. Wellen ist schon kurz im Kapitel “Hochfrequenz-Entladungen” besprochen worden. Die dort hergeleitete Absorptionsformel ( $P_{abs} \propto E^2 \cdot (\nu/\nu^2 + \omega^2)$ ) ist aber (logischerweise) nicht selbstkonsistent, d. h. das einzusetzende E-Feld musste als bekannt vorgegeben werden. Um die Dämpfung konsistent zu beschreiben, muss daher der Wellenweg im Medium mit Berücksichtigung der Dämpfung verfolgt werden, d. h. der komplexe Brechungsindex ist zur Wellenbeschreibung herzunehmen. Im Fall von **Stoßdämpfung** schreibt sich die Bewegungsgleichung dann:

$$n_e \cdot m_e \cdot \ddot{\vec{x}} + n_e \cdot m_e \cdot \dot{\vec{x}} \cdot \nu_{Sto\beta} = -n_e \cdot e \cdot \vec{E}.$$

Mit:

$$\vec{j} = -e \cdot n_e \cdot \dot{\vec{x}} \quad \text{und} \quad \vec{x}(t) = \vec{x}(0)e^{i\omega t}$$

folgt jetzt:

$$\vec{j} = \left[ \frac{e^2 \cdot n_e}{m_e} \cdot \frac{i\omega + \nu}{\omega^2 + \nu^2} \right] \cdot \vec{E}.$$

Dies in die Wellengleichung (vgl. Kapitel “Wellen im Plasma”) eingesetzt ergibt:

$$k^2 \cdot \vec{E} + \frac{-i\omega}{\varepsilon_0} \varepsilon_0 \mu_0 \left[ \frac{e^2 \cdot n_e}{m_e} \cdot \frac{i\omega + \nu}{\omega^2 + \nu^2} \right] \cdot \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \vec{E}.$$

Aus der Wellengleichung resultiert jetzt ein komplexer Brechungsindex  $N$  bzw. ein komplexer Wellenvektor  $\vec{k}$ :

$$N^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \left( \frac{e^2 \cdot n_e}{\varepsilon_0 \cdot m_e} \right) \cdot \left[ \frac{1 - i\nu/\omega}{\omega^2 + \nu^2} \right].$$

Wie man sofort erkennt, hat der frequenzabhängige Faktor  $\nu / (\nu^2 + \omega^2)$  in  $P_{abs}$  sein Maximum bei  $\nu = \omega$  bzw. bei  $\nu/\omega = 1$ . Für hohe Stoßfrequenzen und/oder geringe Wellenfrequenzen fällt die Absorption  $\propto 1/\nu$  ab, für niedrige Stoßzahlen bzw. hohe Wellenfrequenzen steigt die Absorption bis zum Maximum  $\propto \nu$  an. Dabei lässt sich die jeweils verschiedene Wirkung der Stöße in den beiden Frequenzbereichen mit dem in Abbildung ?? skizzierten Bild veranschaulichen.

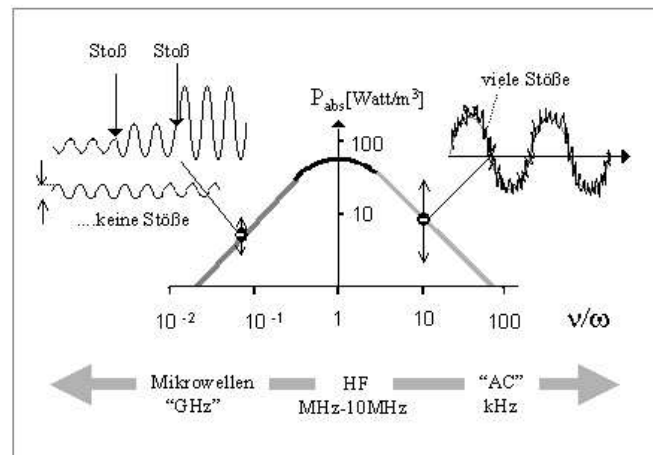


Abbildung 9.3: Abhängigkeit der Stoßdämpfung von der Frequenz der eingestrahlten Welle.

Bei niedrigen Wellenfrequenzen und dementsprechend  $\nu/\omega \gg 1$  (d. h. viele Stöße über eine Schwingungsperiode) folgt eine Elektronenbewegung äquivalent der eines alternierenden Gleichstromes. Da die Leitfähigkeit mit zunehmender Stoßfrequenz abnimmt fällt die aufgenommene Leistung ( $P_{abs} = \sigma \cdot E^2$ ) auch entsprechend ab. Bei sehr hohen Frequenzen vollführen die Elektronen viele Oszillationen zwischen zwei Stößen. Überhaupt ohne Stöße bliebe die Oszillationsamplitude konstant. Mit dem Auftreten von Stößen kommt es immer wieder zu Phasensprüngen bei der Elektronenoszillation. Bei passendem Phasensprung nimmt das jeweilige Elektron weitere Energie aus dem Wellenfeld auf und kann so in der Amplitude (Energie) hochkommen. Umgekehrt ("destruktiver Phasensprung") kann aber auch kinetische Energie wieder an das Wellenfeld abgegeben werden. Da die Energieaufnahme aber proportional zur schon vorhandenen Geschwindigkeit erfolgt ( $P = K \cdot v$ ) ergibt sich im statistischen Mittel immer ein Nettogewinn, d. h. eine Nettoabsorption der Welle.

## 2) Stochastische ("stoßfreie") Dämpfung

Bei der Absorption hochfrequenter Wellen über Stöße ist im Allgemeinen  $\nu_{stoß} < \omega_{welle}$ . Die Stöße haben dabei die Funktion, die Phasenlage der in der Welle oszillierenden Teilchen (Elektronen) statistisch zu verändern, woraus unmittelbar eine Dämpfung resultiert. Entsprechende Phasensprünge und damit "Stöße" können aber auch in einem stoßfreien Plasma auftreten, wenn starke Feldinhomogenitäten vorliegen (Randschichtpotential, Magnetfeldinhomogenitäten). Die Abbildung ?? zeigt eine entsprechende Konfiguration (technisch genutzt für Plasmaätzen bei sehr geringen Gasdichten!).

Wie aus dem Bild ersichtlich, wird ein Plasma durch HF im Gebiet eines magnetischen Stauendes erzeugt. Im Zentrum ist hier  $B = 0$ , nach allen Seiten steigt  $|B|$  dann steil an und es gilt:

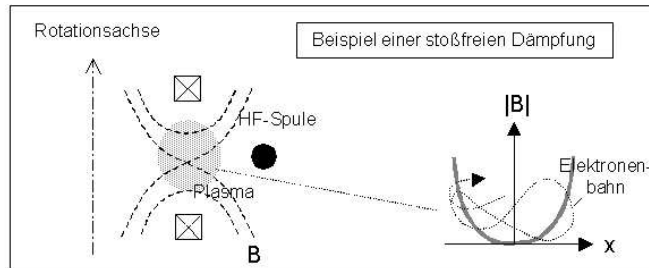


Abbildung 9.4: Beispiel für eine stoßfreie Dämpfung.

$$r_{ge} \ll B/\nabla B.$$

Mit dieser Bedingung werden die Elektronen an den Wänden dieses “Magnet-Topfes” reflektiert, sie “stoßen”. In diesem Beispiel wird erreicht, dass diese effektive Stoßfrequenz um zwei bis drei Größenordnungen über der Teilchenstoßfrequenz ( $e - n, e - e$ ) liegt.

### 3) Zyklotrondämpfung

Unter Zyklotrondämpfung versteht man die Wellen-Absorption durch Elektronen oder Ionen, die mit der eingestrahlten Wellenfrequenz in Resonanz (d. h.  $\omega_{welle} = \omega_{ce}$  bzw.  $\omega_{ci}$ ) sind. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich das Vorliegen von:

- (a) Wellenresonanz mit  $N \rightarrow \infty$  und Teilchenresonanz  $\omega_c = \omega_{welle}$
- (b) Nur Teilchenresonanz  $\omega_c = \omega_{welle}$ , aber  $N = O(1)$

Im ersten **Fall a)** (ECR-Absorption der R-Welle ( $k \parallel B_0$ )) ist die Dämpfung groß bis hin zu geringen Elektronentemperaturen. Der Mechanismus ist einfach verständlich: Die Welle wird abgebremst ( $N \gg 1$ !) bis in den Bereich thermischer Elektronengeschwindigkeit und tritt hier in starke Wechselwirkung mit den Elektronen.

Im **Fall b)**, d. h. Absorption ohne gleichzeitige Wellenresonanz ist eine merkliche Absorption nur möglich, wenn die resonanten Teilchen schon “heiß” sind. Sie müssen einen im Vergleich zur Wellenlänge **endlichen Gyroradius** aufweisen (%-Größenordnung). Der zugrundeliegende Absorptions-Mechanismus soll am Beispiel der O-Mode erläutert werden:

Fällt eine “ordentliche Welle” senkrecht zu  $B_0$  in ein Plasma ein, so werden die Elektronen auch bei Vorliegen von EC-Resonanz parallel zu den Magnetfeldlinien hin- und herbewegt. Auch bei hohen E-Feld-Amplituden (z. B.  $10^6 \text{ V/m}$ ) beträgt die Oszillationsamplitude nur Größenordnung “ $\mu\text{m}$ ”, eine Absorption findet zunächst nicht statt!

Besitzt das Elektron einen endlichen Gyroradius so passiert grundsätzlich dasselbe: Das gyrierende Elektron wird parallel zum Magnetfeld vom Wellenfeld bewegt. In Projektion zur Wellenrichtung bewegt sich das Elektron aber zugleich auch in Richtung der Welle vor und zurück. Die einzelnen Wellenperioden erscheinen also unterschiedlich lang (“rot” bzw. “blau” verschoben), und für das gyrierende Elektron ergibt sich damit die neue Feldstärke  $E_{bewegt}(t)$ :

$$E_{bewegt} = E_0 \cdot \sin \left\{ \omega t + \frac{v_{e\perp}}{v_{ph}} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \right\},$$

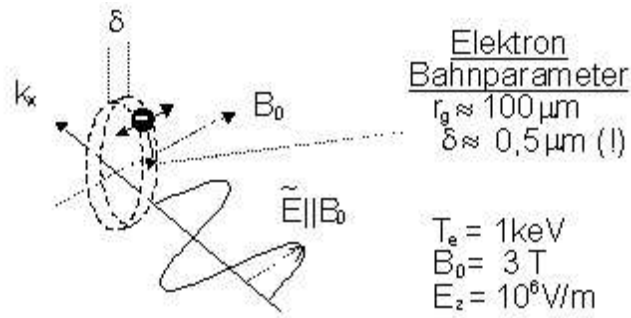


Abbildung 9.5: Effekt eines endlichen Gyrationradius bei der Zyklotrondämpfung.

dabei ist  $\phi$  der (zufällige) Phasenwinkel zur Welle.

Wegen der Kleinheit von  $v_{e\perp}/v_{ph}$  kann die Gleichung entwickelt werden in:

$$E_{bewegt} \approx E_0 \cdot \sin\omega t + \rho \cdot E_0 \cdot (\cos^2\omega t \cdot \sin\phi)$$

mit:

$$\rho = \frac{v_{e\perp}}{v_{ph}} \ll 1.$$

Dabei kann  $\rho$  auch dargestellt werden als Verhältnis von Gyroradius zu Wellenlänge (= Wirkung des "endlichen" Gyroradius!).

Je nach seiner (zufälligen) Phase  $\phi$  relativ zur Welle "sieht" das Elektron also folgende Feldamplituden.

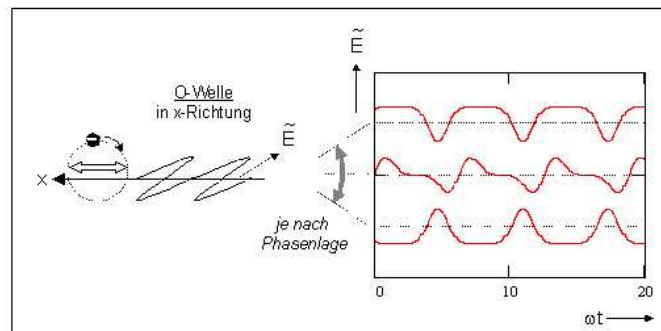


Abbildung 9.6: Feldamplitude gesehen von einem Elektron mit endlichem Gyrationradius. (Um den Effekt sichtbar zu machen, ist die Oszillationsamplitude (Gyrationradius) hier extrem überhöht, d. h. das Elektron hätte in diesem Fall etwa Lichtgeschwindigkeit ( $v_{e\perp} \rightarrow c \approx \rho \rightarrow 1!$ )).

Quantitativ ergibt sich als zeitgemittelte Geschwindigkeits- bzw. Energiezunahme der Elektronen in Richtung parallel zu  $B_0$ :

$$\Delta v_{\parallel} = -\frac{e}{m_e} \cdot \int_0^{\Delta t} E_{bewegt} dt \approx -\frac{e}{m_e} \cdot \rho \cdot E_0 \cdot \sin\phi$$

und:

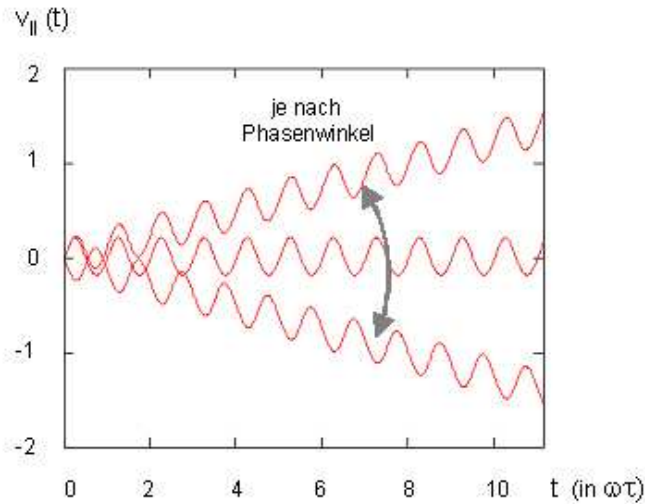


Abbildung 9.7: Der in Abb. 9.6 dargestellte Verlauf des elektrischen Feldes in Abhängigkeit von der Phasenlage führt zu einer Beschleunigung der Elektronen in Feldrichtung ( $\vec{E} \parallel \vec{B}$ ). Als Gesamtbewegung (Beschleunigung + Oszillation) ergibt sich etwa das gezeigte Bild für die Geschwindigkeiten.

$$\Delta W_{\parallel} = \frac{m_e}{2} \cdot \left( (v_{\parallel} + \Delta v_{\parallel})^2 - v_{\parallel}^2 \right) \approx m_e \cdot v_{\parallel} \cdot \Delta v_{\parallel}.$$

Dieses Ergebnis ist von der Größe zwar richtig, aber die Richtung stimmt nicht, denn bei der **O-Mode-Absorption** werden die **Elektronen in Senkrecht-Richtung geheizt!**

Um das korrekte Ergebnis zu erhalten, muss noch das B-Feld der Welle<sup>2</sup> mit berücksichtigt werden! Die Parallel-Bewegung des Elektrons (zu  $E_{welle}$  bzw. zu  $B_0$ ) setzt sich um in ein E-Feld in Ausbreitungsrichtung der Welle (hier die x-Richtung, also  $E_x$ ):

$$E_x = v_z \cdot B_{y,welle} = v_z \cdot \frac{E_{z,welle}}{v_{ph}}; (\parallel \rightarrow z).$$

Mit:

$$E_x = \left( \frac{v_{\parallel}}{v_{e\perp}} \right) \cdot \left( \frac{v_{e\perp}}{v_{ph}} \right) \cdot E_{z,welle}$$

folgt weiter:

$$\Delta v_x = \left( \frac{v_{\parallel}}{v_{e\perp}} \right) \cdot \Delta v_z.$$

Daraus resultiert eine Zunahme von Senkrecht-Energie:

$$\Delta W_{\perp} = m_e \cdot v_{e\perp} \cdot \Delta v_x = m_e \cdot v_{\parallel} \cdot \Delta v_{\parallel} = \Delta W_{\parallel}.$$

Die "heiße" O-Mode-Absorption kann also in die folgenden zwei Schritte zerlegt werden:

1. Bei endlichem Gyroradius erhält ein Elektron Parallel-Energie aus dem Wellenfeld  $\vec{E} (\parallel \vec{B}_0)$  ( $\rightarrow$  Unsymmetrie der Feld-Halbwellen durch Rot-/Blauverschiebung usw.).

<sup>2</sup>Anmerkung: Mit  $B_{welle} = E_{welle}/v_{ph}$  ist das B-Feld zwar äußerst klein (bei  $E = 10^6 \text{ V/m}$  folgt  $B \approx 30$  Gauss), dennoch ist das Wellenmagnetfeld hier von Bedeutung!!

2. Durch das B-Feld der Welle wird die Energie (Impuls!) über  $\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}_{welle}$  voll in die Senkrecht-Richtung umgelenkt, d. h. Senkrecht-Heizung.

Im inhomogenen Magnetfeld (z. B.  $B \propto 1/R$ ) ist jedoch noch ein weiterer Schritt erforderlich:

3. Endlich breite Resonanzzone durch **relativistische** und/oder **Doppler-Verbreiterung**.

Ansonsten wäre ja die Absorption auf die - im Prinzip - unendlich schmale Resonanzstelle beschränkt! Die nötige endliche Absorptionstiefe der Wellen kann durch zwei Mechanismen erreicht werden:

- (a) Bei rein senkrechter Einstrahlung ist dies die **relativistische Verbreiterung** des Absorptionsbereichs gemäß:

$$\omega_{ce,rel.} = \frac{e \cdot B}{m_{e,rel.}} = \frac{e \cdot B}{m_{e0} / \sqrt{1 - (v_e/c)^2}}.$$

D. h. die “kalten” Elektronen (aus der Verteilungsfunktion) absorbieren am Ort der Resonanz mit der Elektronenruhemasse, die “heißeren” Elektronen haben ihre Resonanz bei etwas höherem Magnetfeld; im Torus also etwas nach innen verschoben. Bei der “Relativistischen Absorption” ist die Absorptionszone also beginnend von der “kalten” Resonanz in den Bereich höheren Feldes hinein (d. h. unsymmetrisch) verbreitert.

- (b) Erfolgt die Einstrahlung aber unter leicht schrägem Winkel (z. B.  $> 5 - 10^\circ$  von der Senkrechten) so dominiert ein anderer Effekt: die **Doppler-Absorption**. Unter Berücksichtigung der Dopplerverschiebung von Elektronen die entweder mit oder gegen die jetzt vorhandene Parallelkomponente der Welle (also parallel zu  $\vec{B}$ ) laufen, folgt für die Resonanz:

$$\omega_{ce,Doppler} = \omega_{ce} \pm k_{\parallel} \cdot v_{e\parallel}$$

Maßgeblich (neben der Parallelkomponenten  $k_{\parallel}$ ) ist jetzt also die Parallel-Temperatur der Elektronen! Elektronen die mit dem  $k_{\parallel}$  der Welle laufen sehen eine niedrigere Frequenz (“rotverschoben”) und absorbieren vor der “kalten” Resonanz, Elektronen gegen  $k_{\parallel}$  sind “blauverschoben” und absorbieren bei höherem Feld, also hinter der “kalten” Resonanz. Die Absorptionszone ist in diesem Fall also symmetrisch um die “kalte” Resonanz verbreitert! Ist die Absorption stark, werden die “roten” Elektronen logischerweise bevorzugt bzw. ausschließlich geheizt, da für die “blauen” keine Leistung mehr übrigbleibt. Dies ist in einigermaßen heißen Fusionsplasmen der Fall und wird zum ECRH-Stromtrieb ausgenutzt!

Beide Effekte - relativistische und Doppler-Absorption - überlagern sich und ergeben einen monotonen Verlauf des Absorptionskoeffizienten (d. h. ungefähr konstante Absorption) im ganzen Winkelbereich von  $0^\circ$  bis ca.  $\pm 20^\circ$  um die Senkrechte herum. Der resultierende Absorptionsbereich der EC-Wellen erstreckt sich über ca. 1-2cm (typ. Fusionsplasma), wie sich durch Einsetzen der Parameter in die Resonanzformeln sofort ableiten lässt. Die ECR-Absorption erfolgt also extrem lokalisiert! Die Gesamt-Absorption ( $O_1$ -Mode) ist proportional zur Elektronentemperatur (heiße Elektronen erforderlich!) und invers proportional zum (auf die Wellenlänge normierten) Magnetfeldgradienten (Breite der Absorptionszone!).

4) Landaudämpfung

Ein vierter Absorptionsmechanismus ergibt sich für eine longitudinal polarisierte Welle, auch elektrostatische Welle. In diesem Fall können geladene Teilchen (Elektronen) im Potential der Welle eingefangen und mitgenommen werden (vgl. Abb. ??).

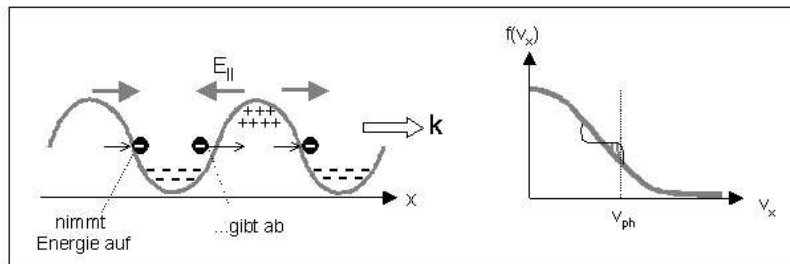


Abbildung 9.8: Schematische Darstellung der Landaudämpfung.

Wie im Bild angedeutet, ergibt sich die wesentliche Wechselwirkung für Elektronen, die ungefähr mit der Phasengeschwindigkeit der Welle laufen. Etwas langsamere Elektronen werden dabei beschleunigt und nehmen Energie auf, etwas schnellere Elektronen geben Energie an das Wellenfeld (und über dies an die langsameren) ab. Auf diese Weise entsteht eine deformierte Verteilungsfunktion, wie rechts im Bild angedeutet. In der Gesamtbilanz wird der Welle Energie entzogen (**Landaudämpfung**, wie im Kapitel “Vielteilchenbeschreibung von Plasmen” diskutiert). Damit wird den Elektronen zugleich auch ein Netto-Impuls zugeführt, sodass mit der Landaudämpfung sehr effizient Ströme im Plasma angetrieben werden können.

Für eine effiziente Welle-Elektronen-Kopplung mit  $v_{phase} \approx v_e$  sind allerdings relativ langsame Wellen erforderlich, um noch hinreichend viele Elektronen im energetischen “Schwanz” der Verteilungsfunktion vorzufinden. Durch Landaudämpfung können zugleich aber auch die benötigten schnellen Elektronen bis in den 100keV-Bereich hinein “selbst erzeugt” werden.

Nach Diskussion der verschiedenen Absorptionsmechanismen sollen nun die auf den drei maßgeblichen Elektronen- bzw. Ionen-Resonanzen beruhenden Wellenheizverfahren näher diskutiert werden.

### 9.2.2 Elektronen-Cyclotron-Resonanz-Heizung (ECRH)

Die ECRH ergibt die Heizmethode mit höchster Frequenz: Die ECR-Absorption der R-Welle ist für die Fusionsforschung nicht von Interesse, weil im Torus mit  $\vec{k} \parallel \vec{B}$  nicht eingestrahlt werden kann. Es werden daher die im Kapitel “Wellen im Plasma” diskutierten Wellen mit Ausbreitungsrichtung (fast) senkrecht zum Magnetfeld verwendet: die “ordentliche Welle” (O-Mode) mit  $\vec{E} \parallel \vec{B}$  und die “außerordentliche Welle” (X-Mode). Bei den typischen Fusionsmagnetfeldern von 3-5 Tesla liegt die Grundfrequenz (O-Mode mit  $\omega = 1 \times \omega_{ce}$ ) bereits bei 80-140GHz (d. h. 2-4mm Vakuumwellenlänge). Häufig wird auch die “1. ECR-Harmonische” eingesetzt (X-Mode mit  $\omega = 2 \times \omega_{ce}$ ), was noch einmal eine Verdopplung bzw. Halbierung von Frequenz bzw. Wellenlänge bedeutet. Derart kurze Wellenlängen können “quasi-optisch” (d. h. über Spiegel übertragen und in das Plasma eingekoppelt werden. Großer Vorteil der ECRH ist dabei, dass insbesondere keine “optische Anpassung” an das Plasma bzw. die Plasmaranddichte vorgenommen zu werden braucht: Der Plasma-Brechungsindex am Rande ist  $N = 1$ , die Wellen können



aus großer Distanz in das Plasma eingestrahlt werden (praktisch keine Belastung bzw. Schädigung der Antennenstrukturen (Spiegel)).

Abbildung ?? zeigt den typischen Aufbau eines ECRH-Systems.

Abbildung 9.9: Prinzip der ECR Heizung.

Eine wesentliche Komponente ist das **Gyrotron** als leistungsstarker mm-Wellen-Generator mit 0,5 bis 1MW. Das Funktionsprinzip des Gyrotrons entspricht der Umkehrung der ECRH: Ein energiereicher Elektronenstrahl (80kV, 25-40A) wird in ein ansteigendes Magnetfeld (parallel zu B) eingeschossen. Dabei wird die zunächst hohe Parallelenergie der Elektronen zu großen Teilen in Senkrechtenergie umgesetzt (Erhaltung des magnetischen Moments!). Das hohe Magnetfeld (Resonator-Teil) ist auf ECR eingestellt und die Senkrechtenergie wird zum Teil (ca. 30%) in Strahlung umgesetzt, die über geeignete Spiegelkonvertoren seitlich als "Gaußscher Mode" (Gaußprofil, linear polarisiert) ausgekoppelt wird. Der e-Strahl selbst wird im Kollektor aufgefangen. Die ausgekoppelte Strahlung wird sodann über abbildende Spiegel zum Plasmatorus übertragen (Distanz typ. 50m) und dort über ein schwenkbares Spiegelsystem in das Plasma eingestrahlt. (Anstelle der Fernübertragung durch Spiegel kann auch ein "überdimensionierter Wellen- bzw. Hohlleiter" ( $\varnothing \gg \lambda$ ) eingesetzt werden). Auf der ECR-Position werden die Wellen (bei den typischen Fusionstemperaturen) sehr lokal und vollständig im Plasma absorbiert.

### 9.2.3 Lower-Hybrid-Heizung (LH)

Die sogenannte "Lower-Hybrid-Resonanz" gibt den nächstniedrigen Frequenzbereich, in dem eine effiziente Wellen-Plasma-Wechselwirkung genutzt werden kann. In diesem Fall liegen die Frequenzen in etwa bei dem geometrischen Mittel von Elektronen- und Ionen-Cyclotron-Resonanz, also bei etwa 2,5-5GHz (6-12cm Vakuumwellenlänge). Die Mikrowellenleistung wird über eine Vielzahl von zu einem Array zusammengefassten Hohlleitern in den Plasmarand eingekoppelt, wobei sich dieser sogenannte "Grill" in sehr geringem Abstand vom Plasmarand befinden muss ( $d \ll \lambda$ ). Die Wellen laufen (schräg zu  $\vec{B}$ ) in das Plasmaminnere zur LH-Resonanz. An der Resonanzstelle (hier "echte" Wellenresonanz!) wird die eingekoppelte elektromagnetische (Transversal-)Welle in eine elektrostatische Longitudinalwelle umgesetzt und über Landaudämpfung von den Elektronen absorbiert. Gibt man dem Grill eine Richtungscharakteristik ("phased array" mit jeweils  $\Delta\phi = 90^\circ$  fortschreitend zwischen benachbarten Hohlleitern) lässt sich Impuls in eine Richtung auf die Elektronen übertragen und es wird ein Strom getrieben (vgl. Schluss dieses Abschnitts!). Abbildung ?? vermittelt ein Bild von einem LH-System. Wesentliches Problem von LH-Heizung bzw. Stromtrieb ist der benötigte geringe Abstand zum Plasmarand. Unter Reaktorbedingung erscheint das LH-Konzept fraglich (zu kurze Lebensdauer?).

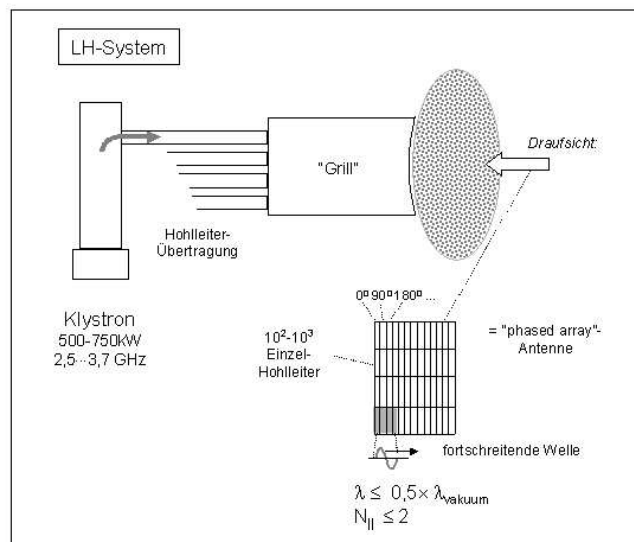


Abbildung 9.10: Prinzip der LH-Heizung.

### 9.2.4 Ionen-Cyclotron-Resonanz-Heizung (ICRH)

Die Ionen-Cyclotron-Resonanz gibt den nächsten Frequenzbereich für Wellenheizung von magnetisch eingeschlossenen Plasmen. Entsprechend  $2\pi \cdot f = Ze \cdot B/m_i$  liegen die ICRH-Frequenzen für die in der Fusion interessierenden Ionensorten ( $H^+$ ,  $D^+$ ,  $T^+$ ,  $^3He^{2+}$ ,  $^4He^{2+}$ ) im Bereich von 30-100MHz, also im KW-UKW-Bereich. Die erforderlichen Leistungen von einigen Megawatt (bzw. einiger 10MW im Reaktor) werden über magnetische Dipol-(Schleifen-)Antennen in das Plasma eingekoppelt. Das Prinzipbild eines derartigen ICRH-Systems ist in Abb. ?? dargestellt. Wie dem Schemabild zu entnehmen, besteht ein ICRH-System aus dem HF-Generator (Vorverstärker, Leistungs-Endstufe), eine  $50\Omega$ -Koax-Leitung und der Dipolantenne (typ. 1m-Dimension, d. h.  $L \ll \lambda_{vak}$ ). Die Antenne hat einen Strahlungswiderstand von

nur typ.  $1 - 3\Omega$ , sodass eine Anpassung an den  $50\Omega$ -Wellenwiderstand der Leitung vorgenommen werden muss.

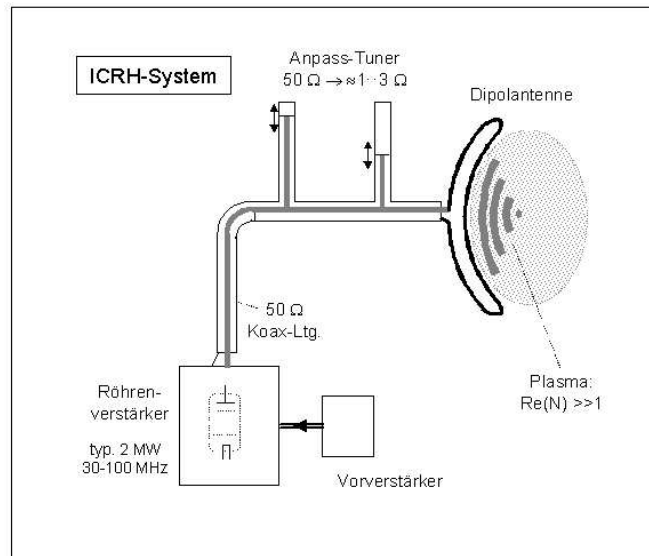


Abbildung 9.11: Prinzip der ICRH.

## 9.3 "Nicht-induktiver" Stromtrieb

Ein kontinuierlicher Antrieb des Plasmastromes gegen den ohmschen Widerstand (d. h. ohne per Trafo induzierte Umfangsspannung) würde auch für das Tokamak den stationären Betrieb erlauben und ist daher von besonderem Interesse. Grundsätzlich sind alle behandelten Heizverfahren - wenn auch mit unterschiedlicher Effizienz gemessen in Ampère/Watt - in der Lage, einen Plasmastrom zu generieren. Wegen der deshalb großen Bedeutung des "nicht-induktiven" Stromtriebs sollen die einzelnen Wirkungsprinzipien kurz besprochen werden.

### 9.3.1 Stromtrieb mit Neutralinjektion

Mit den tangential eingeschossenen Neutralteilchen resultiert - nach deren Ionisation - zugleich auch ein umlaufender Ionenstrom:

$$I_{circ.} = I_{inj.} \cdot \frac{\tau_{brems}}{\tau_{circ.}} = e \cdot Z_{inj.} \cdot \frac{P_{NBI}}{W_{NBI}} \cdot \frac{\tau_{brems}}{2\pi R/v_{inj.}}$$

Bei der Abbremsung an den Plasmaelektronen (und -ionen) wird aber zugleich ein Elektronenstrom getrieben, der (entsprechend den Stoßformeln) den Ionenstrom dann genau kompensiert, wenn eingeschossene Ionensorte und Plasmaionen das gleiche  $Z$  (bzw.  $Z_{eff}$ ) besitzen. Erst wenn diese Werte unterschiedlich sind, verbleibt ein kleinerer Nettoeffekt. Dieser vergrößert sich, wenn ein Teil der Plasmaelektronen gefangen ist und zur Stromkompensation nicht beitragen kann. Man erhält als verbleibenden Nettostrom:

$$\frac{I_{netto}}{I_{circ.}} \approx 1 - \frac{Z_{inj.}}{Z_{plasma}} \cdot (1 - f_{gef.})$$

( $f_{gef.}$  = Bruchteil der gefangenen Elektronen)

Zugleich existiert eine optimale Einschussenergie:

$$W_{NBI} \approx 40 \cdot T_e \cdot A_{inj.}$$

( $A_{inj.}$  = Atomgewicht der injizierten Neutralteilchen)

Für Stromtrieb mit Deuterium ( $A=2$ ) in einem Fusionsplasma ( $T_e > 10\text{keV}$ ) sollte die Beam-Energie daher im Bereich von 1MeV liegen, was nur mit Negativ-Ionentechnologie erreichbar ist. Die Stromtriebseffizienz steigt proportional zu Elektronentemperatur, ist aber selbst für Reaktortemperaturen relativ bescheiden ( $< 0,07\text{A/Watt}$ ).

### 9.3.2 Stromtrieb mit Wellen

Der (direkte) Stromtrieb durch Wellen erfolgt durch direkte Übertragung des Wellenimpulses auf die Elektronen<sup>3</sup>. Hierbei lässt sich ganz allgemein eine Stromtriebseffizienz formulieren:

$$\frac{j}{P_{Vol.}} = \frac{e \cdot n_{e\parallel} \cdot v_{\parallel}}{\left(n_{e\parallel} \cdot \frac{m_e \cdot v_{\parallel}^2}{2}\right) \cdot \nu_{sto\beta}} \cong \frac{\parallel - \text{Impuls}}{\parallel - \text{Energie/Lebensdauer}}$$

damit gilt:

$$\frac{j}{P_{Vol.}} \propto \frac{1}{v_{\parallel} \cdot \nu_{sto\beta}}.$$

Weiter lassen sich gemäß Abb. ?? zwei Grenzfälle unterscheiden, nämlich:

langsame Elektronen:

schnelle Elektronen:

$$\frac{j}{P_{Vol.}} \propto \frac{1}{n_e} \cdot \frac{T_e^{3/2}}{v_{\parallel}} \qquad \frac{j}{P_{Vol.}} \propto \frac{1}{n_e} \cdot v_{\parallel}^2$$

Dies ist in Abb. 9.12 graphisch dargestellt.

Wie aus der Abbildung ?? zu entnehmen ist, liegt der Stromtrieb mit Wellen im ICR-Bereich im Minimum der Effizienz bei  $v_{\parallel} \approx v_{the}$ . Günstig ist dagegen die Stromerzeugung mit schnellen Elektronen durch die LH-Wellen. Der Wirkungsgrad steigt (wegen der großen Stoßfreiheit dieser Teilchen) proportional  $v_{\parallel}^2$ . Eine Grenze setzt die Lichtgeschwindigkeit, erreichbare Maximalwerte liegen bei  $2/3c$ . Im Prinzip wären auch sehr langsame Wellen (Alfvén-Wellen mit  $\omega \ll \omega_{ci}$ ) sehr vorteilhaft. Derartige Wellen koppeln aber an entsprechend langsame Elektronen mit subthermischer Geschwindigkeit ( $v_{\parallel} \ll v_{the}$ ). Diese Elektronen sind im Torus aber zu wesentlichen Teilen „gefangen“, sodass die gute Stromtriebseffizienz wieder verloren geht. Miteingetragen ist der Stromtrieb mit injizierten Neutralteilchen (wie beschrieben) und mit ECR-Wellen, Methoden die nicht direkt in das beschriebene Schema passen. Im Fall der ECR verläuft die Stromerzeugung indirekt: Bei schräger Einstrahlung kommen die mit der Welle laufenden („rot-verschobenen“) Elektronen zuerst in Resonanz (bei kleinerem Magnetfeld) und werden senkrecht zu  $\vec{B}$  (d. h. senkrecht zur Stromrichtung aufgeheizt). Sie werden daher (etwas) stoßfreier als die am gleichen Ort entgegelaufenden Elektronen. Im Ergebnis folgt ein

<sup>3</sup>Man beachte: Selbst in einem Fusionsplasma mit  $1000\text{ m}^3$  Volumen beträgt die gesamte Elektronenmasse nur etwa 10 Mikrogramm und der Impuls (bei 10MA) nur etwa  $2 \cdot 10^{-4}\text{ kg} \cdot \text{m/s}$  (entspricht 0,2 Gramm mit 1m/s!)

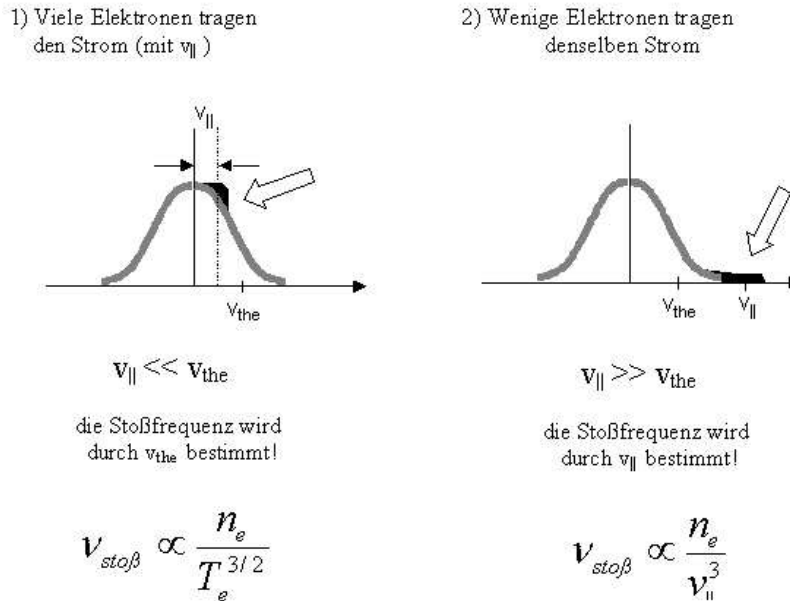


Abbildung 9.12: Stromtrieb durch langsame oder schnelle Elektronen.

Nettostrom mit vergleichsweise kleiner Effizienz. Am besten funktioniert dagegen der (zu ersetzende) ohmsche Stromtrieb mit sehr langsamen Elektronen!

Bisher war die lokale Stromdichte in Relation zur lokalen Heizleistung betrachtet worden. Vielfach ist aber auch das Verhältnis von erzeugtem Gesamtstrom zur benötigten Gesamtheizleistung von Interesse (also das "Ampère/Watt"-Verhältnis). Dieses Verhältnis lässt sich sofort angeben, gemäß:

$$\frac{I}{P_{tot}} = \frac{j \cdot \sqrt{\pi} a^2}{P_{Vol.} \cdot (\sqrt{\pi} a^2 \cdot 2\pi R)}$$

Für  $j/P$  ist die schon angegebene lokale Stromtrieb-Effizienz einzusetzen (d. h.  $j/P = const/v_{||}\nu$  und  $\nu \propto n_e/T_e^{3/2}$  bzw.  $\nu \propto n_e/v_{||}^2$ ). Damit folgt weiter:

$$\frac{I}{P_{tot}} = \gamma(v_{||}, T_e) \cdot \frac{1}{n_e \cdot R}$$

Dabei ist mit der Größe  $\gamma$  zugleich eine globale (dimensionsbehaftete!) Stromtrieb-Effizienz eingeführt worden, die leider nur sehr kleine Werte erreicht. Typische  $\gamma$ -Werte sind [ $n_e$  in  $10^{20} m^{-3}$ , A, Watt, m]:

	$\gamma$
LHCD	0,35...0,4
ICCD	0,1 $\times T_e/10keV$
ECCD	< 0,1 $\times T_e/10keV$
AWCD	1 $\times (T_e/10keV)^{3/2} \times (< 0,1)$
NICD	0,2 $\times T_e/10keV$

(CD steht für "Current Drive")

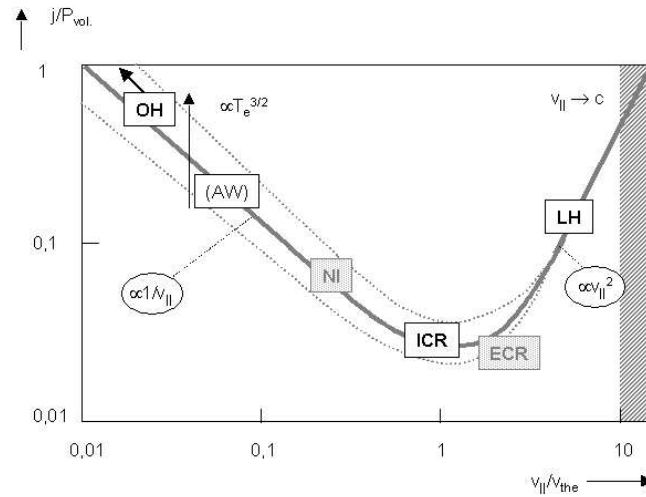


Abbildung 9.13: Stromtriebeffizienten der verschiedenen Heizverfahren.

Für ein Reaktorplasma ( $R \sim 8m$ ,  $\langle n_e \rangle \sim 10^{20}$ ,  $\gamma \sim 0,3$ ) erreicht man demnach mit 50 Megawatt nur einen Strom von ca. 2MA. (Es ist also mindestens 80% vom Plasma “selbstgetriebener” Bootstrapstrom (siehe Kapitel “Neoklassischer Transport”) nötig.

# Kapitel 10

## Diagnostik von Fusionsplasmen

### 10.1 Einführung

Um das Verhalten von Fusionsplasmen mit ihren extremen Parametern im Detail zu untersuchen, wurde eine große Anzahl von (teilweise komplementären) Diagnostikmethoden entwickelt, die in heutigen Experimenten eingesetzt werden. Generell machen die Diagnostiksysteme den größten Teil eines Fusionsexperimentes aus. Das gilt sowohl im Hinblick auf die Geräte als auch auf Kosten und Arbeitsaufwand. Die physikalischen Grundlagen dieser Methoden stammen aus allen Gebieten der Physik, was es erschwert, sie in eine Reihenfolge einzuordnen. Im folgenden Diagramm (Abb. 10.1) versuchen wir dies für die am meisten genutzten Diagnostiken mit dem Namen der Kategorie, in der ersten, der Diagnostik in der zweiten und dem gemessenen Parameter in der letzten Spalte.

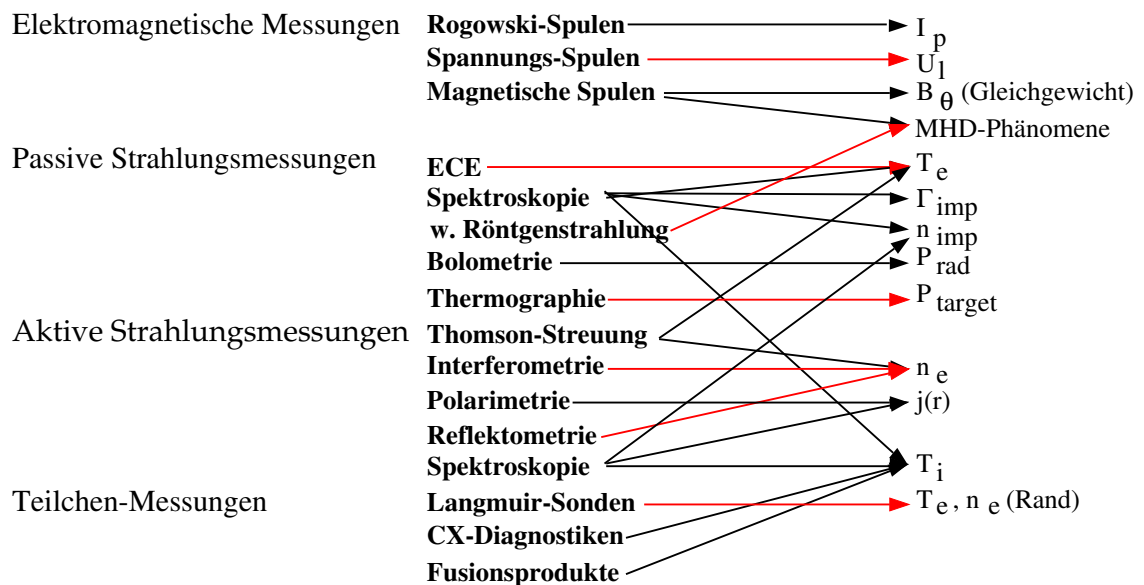


Abbildung 10.1: Methoden und Diagnostiken zur Messung von Plasmaparametern.

Diese Auswahl an Diagnostiken wird im Folgenden kurz erörtert. Die zu Grunde liegenden physikalischen Prinzipien der Plasmadiagnostik werden ausführlicher in [1], [2] wiedergegeben, Beschreibungen von Diagnostiken mit Betonung des experimentellen Aspekts sind in [1], [3] zu finden und ein kurzer Überblick über die grundlegenden Diagnostiken wird in [4] gegeben. Diese Referenzen decken alle Diagnostiken ab und sind leicht zugänglich. Im Folgenden werden ausschließlich zusätzliche Quellen zitiert für Leser, die an weiteren Details interessiert

sind.

## 10.2 Elektromagnetische Messungen

Einige globale Plasmaparameter können durch relativ einfache Messungen der magnetischen Felder und Flüsse außerhalb des Plasmas bestimmt werden. Beispiele hierfür werden in Abbildung 10.2 gezeigt.

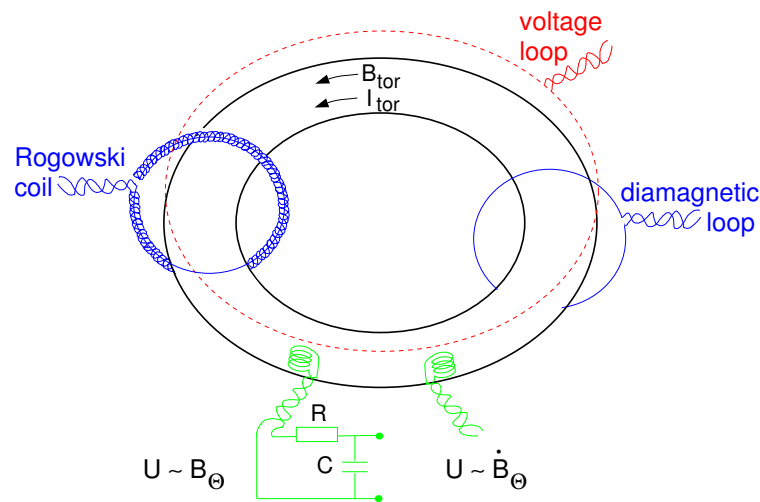


Abbildung 10.2: Schema der elektromagnetischen Diagnostiken (nach [4]).

### Magnetische Spulen

Zeitlich veränderliche magnetische Felder können mit Hilfe einer kleinen Spule der Fläche  $A$  mit  $N$  Wicklungen gemessen werden. Nach dem Faradayschen Gesetz  $\nabla \times \vec{E} = -\partial \times B / \partial t$  ist die induzierte Spannung in der Spule

$$U = N \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = N \int_F \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{F} = -N \int_F \partial \vec{B} / \partial t \cdot d\vec{F} = -N A \dot{B}$$

wenn  $\vec{B}$  über der Oberfläche  $A$  homogen ist.

Die Ausgangsspannung ist also proportional zur Ableitung des gesamten, durch den Draht eingeschlossenen Flusses. Daher sind dessen Zuleitungen verdreht, um die durch sie eingeschlossene Fläche zu minimieren. In den meisten Fällen ist man jedoch am magnetischen Feld  $B$  selbst und nicht an dessen zeitlicher Ableitung interessiert. In diesem Fall kann eine integrierende Analogschaltung (wie in Abbildung 10.2 gezeigt) mit zeitlich konstanten  $RC$  verwendet werden. Die erreichte Ausgangsspannung ist dann proportional zum magnetischen Feld  $B$ . Alternativ kann  $B$  numerisch aus den Rohsignalen berechnet werden. Magnetische Spulen, mit denen  $\dot{B}_\theta$  gemessen wird (siehe Abb. 10.2), werden für zweierlei Zwecke benutzt:

1. Ermittlung des Plasmagleichgewichts: Ein poloidales Array aus Spulen kann dazu verwendet werden, um die horizontale und vertikale Plasmalage, die Plasmaform, die gespeicherte Energie usw. zu ermitteln. Während es offensichtlich ist, dass der Unterschied in  $B_\theta$  gemessen von Spulen direkt unter und über dem Plasma ein Maß für dessen vertikale Position darstellt, ist der Zusammenhang zwischen den Messsignalen und den anderen Gleichgewichtsparametern komplizierter. Für zirkulare Plasmen mit großem Aspektverhältnis können diese Beziehungen analytisch hergeleitet werden. Für elongierte Plasmen, wie sie in modernen Anlagen üblich sind, ist für die Berechnung des Gleichgewichts aus  $B_\theta$ -Messungen größerer Rechenaufwand notwendig.



2. Fluktuationen: Das gleiche poloidale Array kann auch dazu benutzt werden, Fluktuationen im magnetischen Feld zu messen (tatsächlich ist es sogar einfacher, da es keine zeitliche Integration benötigt). Insbesondere kann die poloidale Periodizität  $m$  und die toroidale Periodizität  $n$  der MHD-Instabilität bestimmt werden.

### Rogowski-Spule

Eine spezielle Form von  $B_\theta$ -Spulen ist die sogenannte Rogowski-Spule, eine solenoidale Spule mit konstanter Wicklungsdichte pro Längeneinheit  $n_c$  (siehe Abb. 10.2). Der gesamte Fluss in dieser Spule ist

$$\phi = n_c \oint_l \int_F B dA dl.$$

Ändert man die Reihenfolge der Integration und benutzt das Ampèresche Gesetz  $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ , erhält man

$$U = \dot{\phi} = \mu_0 n_c A \dot{I}_p.$$

Folglich ergibt die Integration den vollständigen aktuellen Plasmastrom  $I_p$ . Es ist wichtig, dass die zurückführenden Drähte (wie in Abb. 10.2 eingezeichnet) innerhalb der Spule zurücklaufen. Ansonsten würde die Spule auch den toroidalen Fluss messen, der durch das Toruszentrum verläuft.

### Umfangsspannung

In Tokamaks ist die Umfangsspannung  $U_l$ , die durch den Transformator induziert wird, ein wichtiger Parameter, da von ihr der Plasmastrom  $I_p$  getrieben wird. Wenn  $I_p$  zeitlich konstant ist, misst eine toroidale Spule  $U_l$  direkt. Sind  $I_p$  und  $U_l$  bekannt, kann die Elektronentemperatur  $T_e$  berechnet werden (bei bekanntem  $Z_{eff}$  bzw. umgekehrt  $Z_{eff}$  bei bekannter  $T_e$ ).

Das vereinfachte Ohmsche Gesetz für den Plasmawiderstand  $\mathfrak{R}$  lautet

$$\mathfrak{R} = \frac{U_l}{I_p} = \frac{2\pi R_0 \eta}{\pi a^2} = \frac{2R_0}{a^2 \sigma},$$

wobei  $\eta$  der spezifische Widerstand und  $\sigma = 1/\eta$  die Leitfähigkeit des Plasmas ist.

Die Formel für die Leitfähigkeit eines vollständig ionisierten Plasmas wurde von L. Spitzer aufgestellt:

$$\sigma = 1.9 \times 10^4 \frac{T_e^{3/2}}{Z_{eff} \ln \Lambda} \Omega^{-1} m^{-1},$$

wenn  $Z_{eff} = \sum_j n_j \cdot Z_j^2 / n_e$  die sogenannte effektive Ionenladung ist, welche ein gutes Maß für den Reinheitsgrad des Plasmas darstellt. Der Coulomb-Logarithmus  $\ln \Lambda$  hängt nur schwach von  $T_e$  und  $n_e$  ab.

### Diamagnetische Spule

Sie misst den toroidalen Fluss des Plasmas, der mit dem normierten Plasmadruck verbunden ist.

## 10.3 Passive Strahlungsmessungen

### Elektron-Zyklotron-Emission (ECE)

Die Elektron-Zyklotron-Emission wird benutzt, um radiale Profile der Elektronentemperatur  $T_e(r)$  zu messen. Ein Überblick über die ECE-Diagnostiken ist in [5] zu finden.

**Physikalische Grundlagen:** Die im magnetischen Feld gyrierenden Elektronen agieren als Dipole und strahlen bei der Elektron-Zyklotron-Frequenz und deren niedrigen Harmonischen, das heißt mit

$$\omega = n \cdot \omega_{ce} = n \cdot \frac{eB}{m_e}.$$

Für ein typisches magnetisches Feld von  $B = 2T$ , ist die zweite harmonische ( $n = 2$ ) Emissionsfrequenz  $\nu = 2\pi\omega = 112GHz$ . Dies entspricht einer Wellenlänge von  $\lambda = 2.8mm$ . Da  $B$  hauptsächlich aus dem toroidalen Feld  $B = (B_0 \cdot R_0) / R$  besteht, wobei  $B_0$  das toroidale Feld im Plasmazentrum (bei  $R_0$ ) ist, erhalten wir eine einfache Beziehung zwischen Frequenz und Radius:

$$\omega_n = n \cdot \frac{eB_0R_0}{m_eR}.$$

Aufgrund der sehr scharfen Resonanz ist die Emissivität auf der fundamentalen Frequenz und in den niedrigen Harmonischen so hoch, dass die Strahlung optisch dick ist. Infolge von Reabsorption entspricht die Strahlungsintensität bei dieser Frequenz fast der eines Schwarzkörpers, d. h. sie folgt der Planck-Kurve. Da die Zyklotronstrahlung im langwelligen Bereich der Planck-Kurve liegt, ist sie proportional zu  $T_e$  (Rayleigh-Jeans-Gesetz):

$$I_n(\omega) = \frac{\omega^2 T_e}{8\pi^3 c^2},$$

wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Damit erlaubt die Messung der Intensität der Zyklotron-Emission bei einer bestimmten Frequenz direkt die Bestimmung von  $T_e(r)$ . Die Zyklotronstrahlung tritt in zwei verschiedenen Polarisierungen auf,  $\vec{E} \parallel \vec{B}$  (sogenannte O-Mode), oder  $\vec{E} \perp \vec{B}$  (sog. X-Mode). Der Großteil der emittierten Energie liegt in der X-Mode. Daher ist das Plasma gewöhnlich optisch dick für Strahlung der ersten und zweiten Harmonischen der X-Mode und der Grundfrequenz der O-Mode.

### Spektroskopie

Während sich der erste Abschnitt mit der Strahlung der freien Elektronen befasst hat, soll hier die Emission durch Atome und Ionen diskutiert werden. Magnetisch eingeschlossene Plasmen sind praktisch immer optisch dünn für diese Art der Strahlung. Ihr Spektrum reicht vom nahen Infrarotbereich bis zur weichen Röntgen-Strahlung und enthält vor allem Informationen über die Zusammensetzung der Verunreinigungen im Plasma. Drei verschiedene Mechanismen für die Emission von Strahlung werden unterschieden:

1. Strahlung von freien Elektronen im Feld der Ionen, sog. Bremsstrahlung bei der es sich um einen Übergang zwischen zwei ungebundenen Zuständen des Elektrons handelt. Dies ergibt ein kontinuierliches Spektrum, wie es in Abbildung 10.3 zu sehen ist.

2. Rekombinationsstrahlung von freien Elektronen, die von einem Ion eingefangen werden (frei-gebunden-Übergang). Dieses Spektrum ist ebenfalls kontinuierlich, weist aber Kanten auf. Diese resultieren von Elektronen mit vernachlässigbarer Energie, die in ein spezifisches Energieniveau des Ions rekombinieren (siehe Abb. 10.3).
3. Linienstrahlung von gebundenen Elektronen in einem angeregten oder ionisierten Atom.

### Kontinuumsstrahlung

Die Spektren der Brems- und Rekombinationsstrahlung fallen exponentiell mit der Frequenz  $\nu$  ab (siehe Abb. 10.3). Der Verlauf ist dabei proportional zu  $\exp(-h\nu/k_B T)$ , sodass die Spektren dazu benutzt werden können, auf  $T_e$  zu schließen, ohne dass eine Absolut-Kalibrierung notwendig ist.

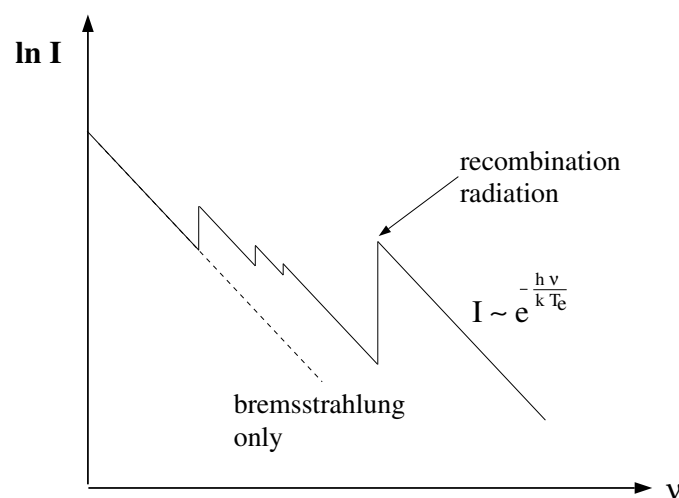


Abbildung 10.3: Qualitatives Spektrum der Kontinuumsstrahlung eines Plasmas.

Die Intensität der Bremsstrahlung hängt von der Ionensorte im Plasma ab. Sind mehrere verschiedene Ionensorten vorhanden, müssen deren Beiträge addiert werden und die Intensität ist proportional zu  $Z_{eff}$ . Daher kann eine absolut kalibrierte Messung genutzt werden um  $Z_{eff}$  zu bestimmen, was ein gutes Maß für die Reinheit des Plasmas ist. Dabei müssen jedoch zwei Bedingungen erfüllt sein: Erstens, die Rekombinationsstrahlung muss vernachlässigbar sein, zweitens muss gewährleistet sein, dass der für diese Messung genutzte Bereich des Spektrums frei von Linienstrahlung ist. Wie aus Abb. 10.3 ersichtlich, ist der Anteil der Rekombinationsstrahlung bei niedrigen Photonenenergien am geringsten. Daher wird diese Messung am besten im Sichtbaren oder nahen Infrarot durchgeführt, in Bereichen in denen das Spektrum frei von Linienstrahlung ist.

### Linienstrahlung

Linienstrahlung von in Atomen oder Ionen gebundenen Elektronen wird bei Wellenlängen emittiert, die charakteristisch für dieses Atom (oder Ion) sind. Daher ist die Spektroskopie ideal geeignet, das Verhalten von Verunreinigungen in einem Fusionsplasma zu untersuchen. Die Hauptziele dabei sind:

- Identifizierung der Elemente im Plasma.
- Messung der Zuflüsse der Verunreinigungen von den Wänden, Limitern oder Divertorplatten mit Hilfe der Linienemission angeregter Atome.
- Bestimmung der totalen Verunreinigungskonzentration.
- Untersuchungen von Transportprozessen durch Vergleich von gemessenen Verunreinigungskonzentrationsprofilen mit Transportmodellen.

Da  $T_e$  normalerweise im Zentrum des Plasmas am höchsten ist und der Ladungszustand von Atomen stark mit  $T_e$  zunimmt, sind die verschiedenen Ionisationszustände eines Elements im Plasma normalerweise in einer Schalenstruktur angeordnet, wie sie in Abbildung 10.4 für Sauerstoff zu sehen ist. In diesem Fall ist der Sauerstoff in der inneren Hälfte des Plasmas vollständig ionisiert und kann deshalb keine Linienstrahlung emittieren. Generell werden leichtere Elemente bereits weiter außerhalb vollständig ionisiert. Nur schwere Elemente (wie z. B. Kr, Xe oder Hoch-Z-Metalle) sind im Zentrum des Plasmas nicht vollständig ionisiert und sind deshalb in der Lage, Linienstrahlung zu emittieren. Da die Anregungsenergie stark mit dem Ladungszustand ( $\sim Z^2$ ) ansteigt, muss die Plasmaspektroskopie einen großen Wellenlängenbereich abdecken. Während für die Untersuchung angeregter Atome und niedriger Ionisierungszustände am Plasmarand sichtbare Linien benutzt werden können, emittieren die hoch geladenen Ionen im Plasmazentrum Linien im Röntgen- und Vakuum-UV-Bereich. Um den gesamten Bereich abzudecken, müssen verschiedene Spektrometer benutzt werden, denen teilweise sehr unterschiedliche Techniken zu Grunde liegen.

#### **Sichtbar und ultraviolett (700-200nm)**

Das Licht kann via Glasfaser oder normalen optischen Komponenten übermittelt werden (für  $\lambda \leq 350\text{nm}$  muss Quarz verwendet werden), Gitter oder Prismen werden benutzt um die Spektren zu zerlegen und das Licht wird anschließend mit CCDs oder Photomultipliern detektiert. Es kann eine sehr hohe spektrale Auflösung erreicht werden ( $\lambda/\Delta\lambda \approx 10^4$ ).

#### **Vakuum ultraviolett (UVV, 200-30nm)**

In diesem Bereich wird das Licht selbst von Luft stark absorbiert und kann nur im Vakuum geführt werden. Gitter können immer noch benutzt werden, fensterlose Photomultiplier, Szintillatoren, Channeltrons oder Channelplates werden zur Detektion genutzt.

#### **Weiche Röntgen-Strahlen (100-1nm)**

Die Detektoren sind die gleichen wie für den UV-Bereich. Um aber das Reflexionsvermögen der Gitter zu verbessern, werden diese bei streifenden Einfallswinkeln eingesetzt ( $1-20^\circ$ ). Die spektrale Auflösung ist jedoch relativ niedrig ( $\lambda/\Delta\lambda \approx 200 - 2000$ ).

#### **Röntgen-Strahlen (2-0.1nm)**

In diesem Spektralbereich wird die Bragg-Reflexion an Kristallen benutzt um die Spektren zu erzeugen. Daraus resultiert eine sehr gute spektrale Auflösung ( $\lambda/\Delta\lambda \sim 10^4$ ). Beryllium-Fenster können verwendet werden und Luft wird wieder transparent. Als Detektor können Szintillatoren und Proportionalzähler verwendet werden. In Folge des immensen Fortschritts auf dem Gebiet der Halbleiter kommen mehr und mehr speziell adaptierte Dioden-Arrays oder CCD-Kameras zum Teil mit vorgeschalteten Bildverstärkern in allen Wellenlängenbereichen zum Einsatz.

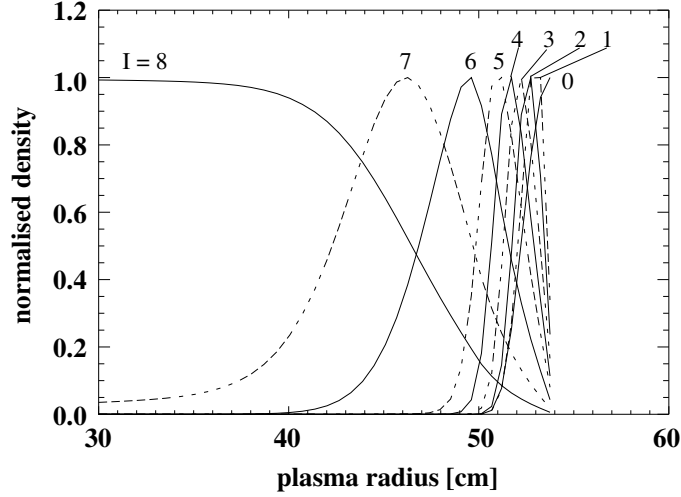


Abbildung 10.4: Radiale Verteilung verschiedener Ionisationszustände von Sauerstoff bei typischen Plasmaparametern und einer zentralen Elektronentemperatur von  $T_e = 1.5 \text{ keV}$  im Tokamak ASDEX.

### Doppler-Messungen

Infolge des Doppler-Effekts wird die Strahlung, die von einem einzelnen Atom oder Ion emittiert wird, in der Frequenz verschoben. Wenn  $\nu_0$  die ursprüngliche Frequenz der Linie ist, ist

$$\nu = \nu_0 \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \alpha \right)$$

eine nicht-relativistische Näherung der verschobenen Frequenz, wobei  $v$  die Geschwindigkeit des Teilchens und  $\alpha$  der Winkel zwischen der Bewegungs- und Emissionsrichtung ist. In einem Plasma beobachten wir jedoch Emissionen einer großen Anzahl von Atomen (Ionen) und der Doppler-Effekt führt in diesem Fall zu einer Verbreiterung der Linie. Normalerweise befinden sich die Ionen (Atome) in thermischem Gleichgewicht und ihre Energien folgen der Maxwell'schen Verteilungsfunktion, die isotrop ist. Dann ist die Intensitätsverteilung der Linie ein Gauss'sches Profil:

$$I(\nu) = I_0 \cdot \exp \left( -\frac{mc^2}{2kT_i} \frac{\Delta\nu^2}{\nu_0^2} \right)$$

und die volle Breite beim halben Maximalwert (FWHM) ist

$$\Delta\nu_{1/2} = 2\nu_0 \sqrt{\ln 2} \sqrt{2kT_i / mc^2}.$$

Generell muss das Gauss-Profil mit der natürlichen Linienbreite gefaltet werden, aber in den meisten praktischen Fällen ist dies eine vernachlässigbare Korrektur. Diese Technik zur Ermittlung von  $T_i$  im Plasmazentrum wird, wie oben erwähnt, weitgehend mit Röntgen-Spektrometern genutzt, da diese eine hohe spektrale Auflösung besitzen und Ionen im Plasmazentrum beobachten können. Wenn das Plasma rotiert (toroidal oder poloidal) und der Winkel zwischen der Beobachtungsrichtung und der Bewegung ungleich  $90^\circ$  ist, wird die verbreiterte Linie auch verschoben.

## Bolometrie

Der Energieverlust eines Plasmas in Folge von Strahlung ist oft ein großer Beitrag zur Energiebilanz und deshalb ein wichtiger Parameter, um das Plasma zu beschreiben.

Der einfachste Weg, die gesamten Strahlungsverluste zu messen, ist ein Bolometer zu benutzen. Dabei handelt es sich um einen Detektor, der speziell dafür konzipiert ist, eine gleichmäßige spektrale Empfindlichkeit über einen großen Frequenzbereich zu besitzen. Dabei ist der UV-Bereich besonders wichtig, da hier die hauptsächlichen Strahlungsverluste auftreten.

Für gewöhnlich besteht ein Bolometer aus einer Metallfolie, die die Energie absorbiert. Der Temperaturanstieg dieser Folie ist gleich dem gesamten Energiefluss geteilt durch die thermische Kapazität des Bolometers. Die endliche Kapazität jedoch setzt der zeitlichen Auflösung dieser Technik Grenzen im Bereich von Millisekunden.

## Messung weicher Röntgenstrahlen (SXR-Diagnostik)

Eine deutlich höhere zeitliche Auflösung (Bruchteile von  $\mu s$ ) kann durch die Verwendung von Halbleiterdetektoren erreicht werden, die für die weichen Röntgenregionen empfindlich sind ( $\hbar\omega \sim T_e$ ). Die absolute Kalibrierung dieser Detektoren ist schwierig, aber sie eignen sich ideal, um dynamische Prozesse (wie MHD-Instabilitäten) im Plasma zu messen.

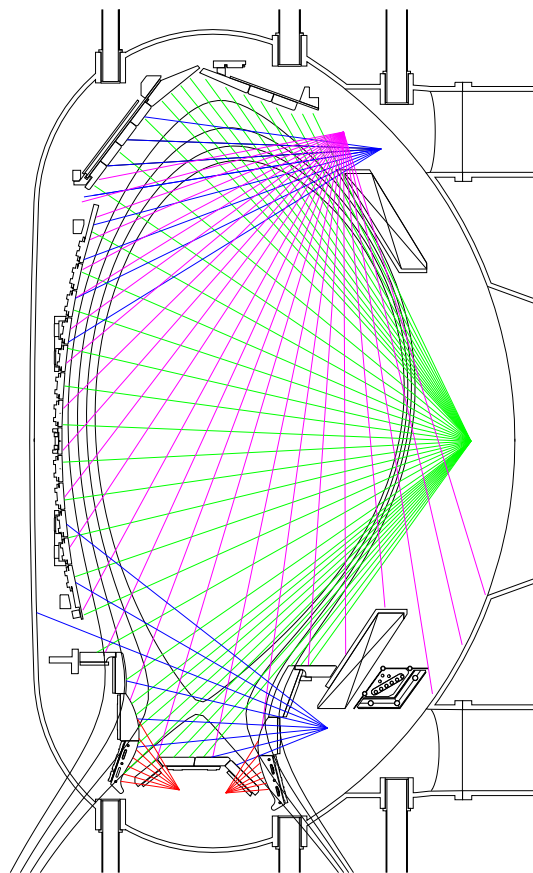


Abbildung 10.5: Sichtlinien des Bolometer-Kamerasystems in ASDEX Upgrade.

Bolometer wie auch SXR-Detektoren messen linienintegrierte Signale die zunächst keine räumliche Auflösung erlauben. Da sie jedoch sehr klein gebaut werden können, wird normalerweise eine große Anzahl von ihnen in einer Lochkamera verwendet. Wenn mehrere solcher Kameras das Plasma aus unterschiedlichen Richtungen, wie in Abb. 10.5 gezeigt, beobachten, kann das lokale Emissionsvermögen von den linienintegrierten Signalen durch einen Inversionsalgorithmus abgeleitet werden (Tomographie).

## Thermographie

Für Wandkomponenten (wie Limiter und Divertroplatten), die mit dem Plasma in Berührung kommen, ist es wichtig, den Leistungsfluss zu kennen. Temperaturänderungen können mit einer Infrarot-Kamera gemessen werden, woraus sich die Leistungsflüsse berechnen lassen, denen sie ausgesetzt sind.

Alternativ können Thermoelemente in die Wandkomponenten eingebaut werden, um den Temperaturanstieg zu messen. Diese Methode wird wegen der schlechten zeitlichen und räumlichen Auflösung im Allgemeinen nur dazu verwendet, um integrale Wärmeflüsse zu bestimmen.

## 10.4 Aktive Strahlungsmessungen

Im vorherigen Abschnitt wurden Diagnostiken diskutiert, die auf der Strahlung basierten, die vom Plasma selbst emittiert wird. Es ergeben sich neue diagnostische Möglichkeiten, wenn man in das Plasma Strahlung oder Teilchen injiziert und die gestreute oder absorbierte Strahlung bzw. die Strahlung der Teilchen misst. Der große Vorteil der meisten aktiven Diagnostiken liegt in der guten räumlichen Auflösung, da das Mess-Signal von dem Punkt kommt, an dem der Teststrahl die Beobachtungsrichtung schneidet.

## Thomson-Streuung

### Grundlagen der Lichtstreuung

Klassisch beschrieben kann man sich die Streuung von Licht an geladenen Teilchen wie folgt vorstellen: Eine elektromagnetische Welle trifft das Teilchen und bringt es zum oszillieren. Nun agiert es als Dipol und strahlt. Betrachtet man die Massen der beteiligten Teilchen, wird klar, dass es in erster Linie die Elektronen sind, die beschleunigt werden und Strahlung emittieren. Das gestreute Licht ist frequenzverschoben in Folge eines zweifachen Doppler-Effekts aufgrund der Bewegung des Elektrons relativ zur einfallenden Welle und zum Beobachter. Diese Frequenzverschiebung ist gegeben durch  $\Delta\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}$ , wobei  $\vec{v}$  die Teilchengeschwindigkeit und  $\vec{k} = \vec{k}_{in} - \vec{k}_{out}$  der Streuvektor (die Differenz zwischen dem  $k$ -Vektor der einfallenden und ausfallenden Welle) ist, wie in Abbildung 10.6 zu sehen ist.

Wie im Fall der Doppler-verschobenen Linienstrahlung beobachtet man nicht Licht von einem einzelnen Elektron. Vielmehr werden alle Beiträge von einem großen Ensemble addiert. Abhängig vom Streu-Parameter  $\alpha = \frac{1}{k\lambda_D}$ , ( $\lambda_D$ : Debye-Länge), ergeben sich zwei Möglichkeiten für den Streuprozess. Mit  $k_{in} \approx k_{out}$ , ergibt sich  $k \approx k_{in} \cdot 2\sin\frac{\Theta}{2}$  und  $\alpha \approx \frac{\lambda_{in}}{4\pi\lambda_D \sin(\Theta/2)}$ . Für  $\alpha \ll 1$  oszillieren benachbarte Teilchen in Phase und man erhält kohärente Streuung bestimmt durch kollektive Effekte. In diesem Fall kann  $T_i$  gemessen werden (Streuung an der Debye Kugel). Bisher wird diese Technik aber noch nicht routinemäßig eingesetzt.

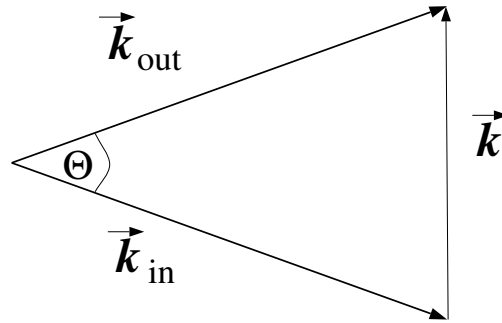


Abbildung 10.6: Geometrie der Thomson-Streuung

Für  $\alpha \gg 1$  wird die Welle an freien, unkorrelierten Elektronen gestreut, und man nennt dieses Regime inkohärenter Streuung Thomson-Streuung. In diesem Fall ist das Spektrum des gestreuten Lichts (für einen festgelegten Streuwinkel) lediglich eine Funktion von  $T_e$ . Eine detailliertere Behandlung der Lichtstreuung im Allgemeinen und der Thomson-Streuung ist in [2] und [6] zu finden.

### Experimentelle Techniken

Das Hauptproblem bei der Thomson-Streuung ist der sehr kleine Anteil des gestreuten Lichts - nur etwa  $10^{-13}$  der einfallenden Energie wird gestreut. Daher konnte die Thomson-Streuung nur mit Lasern als intensiven und monochromatischen Quellen realisiert werden. Aber auch die Detektoren müssen optimiert sein, um den geringen Bruchteil des gestreuten Lichts zu nutzen. Die ersten Thomson-Streuungs-Systeme in den frühen 60er Jahren verwendeten Rubin-Laser ( $\lambda = 694.3\text{mm}$ ) und optimierte Photomultiplier. Allerdings können Rubin-Laser nicht mit einer größeren Wiederholungsrate als  $1\text{Hz}$  gefeuert werden, und so waren nur einzelne bzw. wenige  $T_e$ -Messungen während einer Entladung möglich. Mit der Erfindung von Si-Avalanche-Dioden (welche für infrarotes Licht empfindlich sind) konnten Nd: YAG-Laser mit  $\lambda = 1.06\mu\text{m}$  benutzt werden, und 1982 wurde das erste Thomson-Streuungs-System mit einer Wiederholungsrate von  $60\text{Hz}$  am Tokamak ASDEX entwickelt. Heute ist der Einsatz von Nd: YAG-Laser an Fusionsexperimenten weit verbreitet.

### Interferometrie

Laserstrahlen wechselwirken mit den Plasmaelektronen nicht nur durch Streuung, sondern auch durch Brechung und Reflexion. Ein guter Überblick über Plasma-Interferometrie und Polarimetrie wird in [7] gegeben.

### Physikalische Grundlagen

Wenn das statische Magnetfeld in einem Plasma vernachlässigt werden kann, ist der Brechungsindex  $N = \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$ , wobei  $\omega_0$  die Laserfrequenz und  $\omega_{pe} = (n_e e^2 / \epsilon_0 m_e)^{1/2}$  die Plasmafrequenz (siehe Kapitel 11 aus dem 1. Semester) sind. Für  $\omega_0 \ll \omega_{pe}$  ergibt dies die ungefähre lineare Relation



$$N \simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_0^2} = 1 - \frac{e^2}{2\epsilon_0 m_e \omega_0^2} \cdot n_e.$$

Diese Gleichung gilt ebenso für statische magnetische Felder, solange das elektrische Feld des Laserstrahls parallel zum magnetischen Feld verläuft. Wenn ein Laserstrahl ein Plasma durchquert, erfährt er eine Phasenverschiebung von

$$\Delta\Phi \simeq \frac{e^2}{2c\epsilon_0 m_e \omega_0} \int_L n_e dl.$$

Daher ergibt die Interferometrie nicht die räumlich aufgelöste Elektronendichte, sondern ein Linienintegral, welches (wenn die Sichtlinie  $L$  durch das Plasmazentrum verläuft) bereits einen guten Parameter zur Beschreibung des Plasmas darstellt. Mittels simultaner Messungen mit mehreren Sichtlinien kann das Plasma-Dichteprofil mit einem Inversions-Algorithmus berechnet werden.

### Experimentelle Techniken

Zur Messung der Phasenverschiebung mit Hilfe der Interferometrie wird normalerweise ein Mach-Zehnder-Interferometer benutzt, wie es in Abbildung 10.7 gezeigt wird. Das Licht des Lasers wird in drei Strahlen aufgeteilt, von denen einer frequenzmoduliert ist. Die anderen beiden Strahlen verlaufen entweder durch das Plasma oder auf einem Referenz-Pfad. Beide werden mit dem modulierten Strahl überlagert bevor sie detektiert werden. Die Detektoren messen nun das Signal nicht bei der optischen Frequenz (in der Größenordnung von  $10^{14} \text{ Hz}$ ) sondern auf der Modulationsfrequenz  $\Delta\omega_0$ , welche im günstigen Bereich von ca. 10-100 kHz liegt. Die Phasenverschiebung des Messstrahls wird aus dem Unterschied  $\Delta t$  in korrespondierenden Null-Durchgängen der beiden Detektorsignale bestimmt. Daher ist diese Methode unabhängig von Amplitudenänderungen des Lasers.

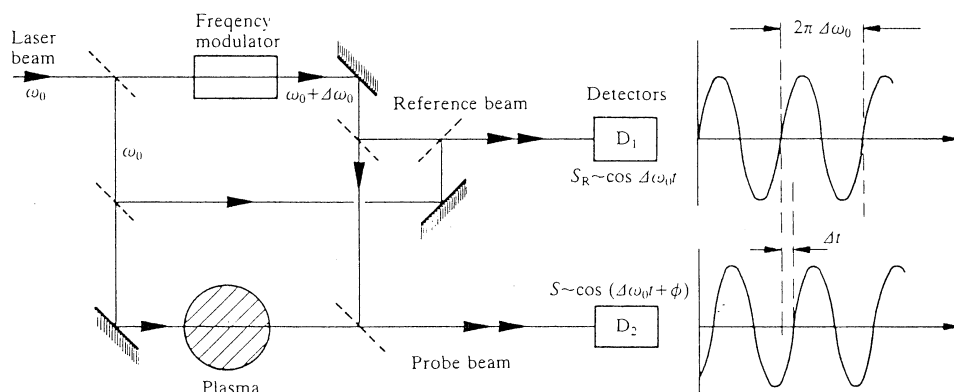


Abbildung 10.7: Schematischer Aufbau eines Dichte-Interferometers (nach [1]).

### Polarimetrie

Laserlicht, das ein Plasma durchquert, wird nicht nur phasenverschoben, sondern es erfährt auch eine Faraday-Rotation. Diese Rotation der Polarisation ist proportional zur magnetischen Feldkomponente parallel zum Laserstrahl  $B_{\parallel}$  und für ein inhomogenes Plasma beträgt die komplette Rotation  $\alpha$  mit  $\alpha \sim \int_L n_e B_{\parallel} dl$ . Ist  $n_e(r)$  von anderen Messungen (z. B. durch Interfe-

rometrie) her bekannt, kann unter Verwendung unterschiedlicher Sichtlinien das radiale Profil von  $B_{poloidal}$  hergeleitet werden.

## Reflektometrie

Wenn eine elektromagnetische Welle auf ihrem Weg durch ein inhomogenes Plasma die kritische Dichte  $n_{crit}$  erreicht, bei der  $\omega_0 = \omega_{pe}$  ist, wird sie reflektiert. Dieser Effekt ist von Metallen bekannt die einen großen Teil des sichtbaren Lichts reflektieren, da die quasifreien Elektronen als Plasma agieren. Die Plasmaschicht, bei der  $n_{crit}$  erreicht ist, wird Cut-Off-Schicht genannt, und dieser Effekt wird in der Reflektometrie genutzt. Ein Überblick über die Reflektometrie wird in [8] gegeben. Prinzipiell wird eine Michelson-Interferometer-Anordnung benutzt, wobei die Cut-Off-Schicht als einer der Spiegel agiert. So kann die Cut-Off-Schicht lokalisiert werden. Indem man die Frequenz zeitlich variiert (und dadurch mehrere Cut-Off-Schichten mit verschiedenen kritischen Dichten erhält), kann das Elektronendichteprofil abgeleitet werden.

## Ladungsaustausch-Spektroskopie

Im Abschnitt über die Linienstrahlung wurde diskutiert, dass leichte Ionen (speziell die Wasserstoffisotope H und D, aber auch He, C und O) nur am Plasmarand strahlen, da sie weiter innen vollständig ionisiert sind. Wenn man einen Strahl neutraler Atome injiziert, können die Ionen bei Stößen mit den Strahl-Atomen durch Ladungsaustausch ein Elektron übernehmen. Aufgrund von Energie- und Drehimpulserhaltung werden dadurch vor allem hochliegende Rydberg-Niveaus besetzt, die selbst bei schwereren Ionensorten sichtbare Strahlung emittieren. Für gewöhnlich werden die Hochenergie-Heizstrahlen auch für die Ladungsaustausch-Spektroskopie genutzt. Diese Technik erlaubt daher eine Messung der Dichte leichter Ionen im Plasmazentrum. Da die Strahlung im sichtbaren Bereich emittiert wird, kann sie mit hoher spektraler Auflösung gemessen werden, was die Ermittlung von  $T_i$  und der Plasmarotation ermöglicht.

## 10.5 Teilchen-Messungen

Eine weitere Gruppe diagnostischer Techniken beruht auf den Teilchen, die das Plasma verlassen. Obwohl idealerweise alle Teilchen vom magnetischen Feld eingeschlossen werden sollten, gibt es einige Ausnahmen, die als diagnostische Werkzeuge genutzt werden können.

### Langmuir-Sonden

Teilchenflüsse am Plasmarand können durch das Einführen einer kleinen Elektrode ins Plasma gemessen werden, an die eine variable Spannung  $U_{Sonde}$  (bzw. Potenzial  $\Phi_{Sonde}$ ) angelegt wird. Wenn der Strom der Sonde  $I_{Sonde}$  gemessen wird, können aus der charakteristischen Kennlinie ( $I_{Sonde}$  versus  $\Phi_{Sonde}$ ) die lokalen Werte von  $n_e$ ,  $T_e$  und das Plasmapotenzial abgeleitet werden (siehe Abb. 10.10 und Kapitel 5 aus dem ersten Semester). Diese elektrostatischen Sonden wurden nach I. Langmuir benannt, der sie in den 20er Jahren entwickelte. Allerdings können Langmuir-Sonden nur in den äußeren Regionen des Plasmas eingesetzt werden. Wenn das Plasma dicht und heiß wird, können die hohen Leistungsflüsse die Sonde zerstören. Daneben muss

darauf geachtet werden, dass die Sonde klein im Vergleich zu den Plasmadimensionen ist, damit die Messung nicht zu einer unzulässigen Störung des Plasmas führt.

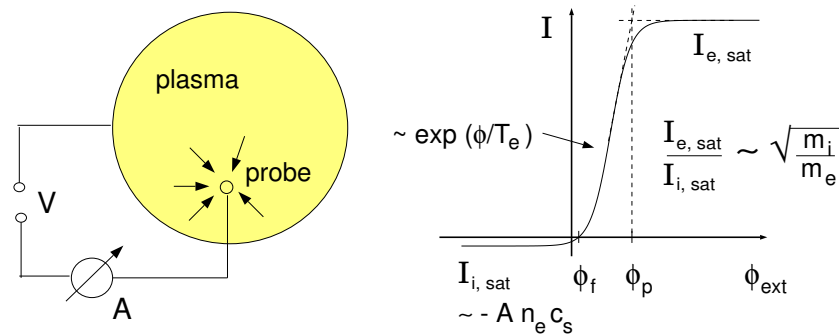


Abbildung 10.8: Schematische Ansicht und Signal einer Langmuir-Sonde

## Ladungsaustausch-Diagnostiken

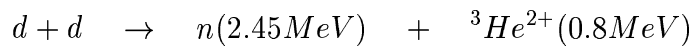
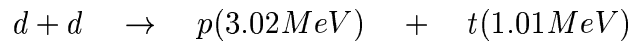
In einem Plasma werden die Plasmaionen durch die magnetischen Felder eingeschlossen. Bei Stößen mit neutralen Teilchen, die auch im Zentrum des Plasmas vorkommen, können sie aber ein Elektron übernehmen, zu neutralen Atomen („Ladungsaustauschneutrale“) werden und das Plasma verlassen. Bei der Ladungsaustauschreaktion bleibt die kinetische Energie der beiden Teilchen erhalten. Daher repräsentieren die das Plasma verlassenden, neutralen Atome die Energieverteilung der Plasmaionen.

### Experimentelle Techniken

Neutralteilchen-Analysatoren bestehen aus zwei größeren Komponenten, einer Stripping-Zelle, bei der in einem Gas niedrigen Drucks die neutralen Teilchen wieder ionisiert werden und einem magnetischen und elektrostatischen Energie-Analysator, um ihr Energiespektrum zu messen. Für Plasmaionen mit einer Maxwell-Energie-Verteilung fällt dieses Spektrum mit der Energie exponentiell ab und erlaubt die Bestimmung von  $T_i$ . Die Diagnostik ist besonders nützlich zum Nachweis von Abweichungen von der Maxwell'schen Verteilung z. B. in Folge von Zusatzheizung. Jedoch stellt sie ebenfalls eine linienintegrierte Messung dar, sodass auch hier verschiedene Sichtlinien notwendig sind, um die Messung zu entfalten und  $T_i(r)$  zu erhalten. Schwierigkeiten kann auch eine zu geringe Dichte der Neutralen bereiten, die außerdem zum Zentrum des Plasmas hin abnimmt. Beide Probleme können durch die Benutzung eines Strahls von neutralen Atomen, welche in das Plasma injiziert werden, umgangen werden. Dies erhöht die Dichte der neutralen Atome und ergibt eine lokalisierte Quelle der Ladungsaustauschneutralen. Für Plasmen mit zunehmender Größe und Dichte wird die Interpretation der Diagnostik problematisch, da die Reionisation der Atome wächst und das Spektrum der Ladungsaustauschneutralen stark beeinflusst. Für Messungen nahe des Plasmarands bleibt sie jedoch sehr wertvoll, selbst bei Plasmen hoher Dichte.

## Fusionsprodukte

Für gewöhnlich wird für Fusionsplasmen in Forschungsanlagen Wasserstoff und Deuterium verwendet. Fusionsreaktionen zwischen Deuteriumionen (d) können über zwei verschiedene Wege ablaufen, wobei entweder hochenergetische Protonen (p) und Tritonen (Tritiumkerne, t) oder  ${}^3\text{He}^{2+}$ -Kerne und Neutronen (n) entstehen:



Neutronen entkommen nahezu ungehindert aus dem Plasma und werden seit den Anfängen der Fusionsforschung als diagnostisches Hilfsmittel benutzt. Die geladenen Fusionsprodukte sind an das magnetische Feld gebunden, da aber ihr Larmorradius in mittelgroßen Fusionsexperimenten in der Ordnung von  $1/3$  des Plasmaradius liegt, können sie immer noch aus dem Plasma entkommen. Da Neutronen und die schnellen geladenen Fusionsprodukte nur selten Stöße im Plasma erleiden, tragen sie die volle Information über den Fusionsprozess.

### Physikalische Grundlagen

Die Fusions-Reaktionsrate in einem reinen Deuteriumplasma ist

$$R = \int_V \frac{n_D^2}{2} \cdot \langle \sigma(v) \cdot v \rangle dV,$$

wobei  $n_D$  die Deuteronendichte ist.  $\langle \sigma(v) \cdot v \rangle$  beschreibt den sogenannten Reaktionsparameter, der sich aus der Faltung des Fusionsquerschnitts mit der Geschwindigkeitsverteilung der Deuteriumionen ergibt (siehe Kapitel 1). Das Integral muss über das gesamte Plasmavolumen ausgeführt werden. Bei bekanntem  $n_D$  ist die Neutronenrate ein direktes Maß für die Ionentemperatur, da  $\langle \sigma(v) \cdot v \rangle$  stark abhängig von  $T_i$  ist. Die meisten der Fusionsreaktionen kommen allerdings durch Ionen am hochenergetischen Ende der Geschwindigkeitsverteilung zu Stande. Daher funktioniert diese Methode ausschließlich für Maxwell'sche Plasmen. Kleine Abweichungen von der Maxwell'schen Energieverteilung (d. h. selbst ein kleiner Bruchteil suprathermischer Teilchen) können die Fusionsreaktionsrate signifikant verändern. Die Ionentemperatur kann jedoch auch aus dem Spektrum der Fusionsprodukte hergeleitet werden. Obwohl deren Energie viel größer ist als die Ionen-Energie, sind die Spektren in Folge der Bewegung der reagierenden Ionen verbreitert (Doppler-Effekt). Bei genügend hoher Energieauflösung der Spektren kann somit  $T_i$  aus der spektralen Breite ermittelt werden.

### Experimentelle Techniken

Die Neutronenemissionsrate kann mit  $BF_3$ - oder  ${}^3\text{He}$ -gefüllten Proportionalzählern oder  ${}^{235}\text{U}$ -Spaltkammern gemessen werden. All diese Detektoren sind nur für thermische Neutronen empfindlich (d. h. bei  $E \approx 0.025\text{eV}$ ), weswegen die Neutronen moderiert werden müssen (z. B. mit Polyethylen), bevor sie den Detektor erreichen. Die Neutronen durchdringen sowohl die Wände des Vakuumgefäßes als auch andere Strukturen und man erhält somit eine volumenintegrierte Messung. In der Praxis ist das Emissions-Profil stark zugespitzt. Man kann daher annehmen, dass es sich um eine toroidale Linienquelle handelt. Dies erleichtert die Absolutkalibration sehr und liefert eine stark das Maximum des Ionentemperaturprofils wichtige Messung. Neutronen-Spektren können mit Szintillatoren, Hochdruck- ${}^3\text{He}$ -Zählern oder time-of-flight-Methoden gemessen werden. Die Kollimation der Spektrometer erfordert jedoch eine starke Abschirmung rund um den Detektor, um dessen Sicht in das Plasma auf eine einzige Sichtlinie zu beschränken. Darüberhinaus müssen bei der Interpretation der Spektren Absorption und Streuung in den Tokamak-Komponenten durch extensive Modellrechnungen über den Neutronen-Transport berücksichtigt werden. Beide Probleme können umgangen werden, indem man die geladenen Fusionsprodukte misst, die leicht kollimiert und sehr effizient in Halbleiter-Detektoren gemessen werden können. Solche Detektoren haben eine exzellente Energieauflösung. Allerdings müssen sie im Inneren des Tokamaks installiert werden, da die geladenen

Fusionsprodukte das Vakuum-Gefäß nicht verlassen können.

### **Zusammenfassung**

Dieser kurze Überblick über Plasmadiagnostiken hat zum Ziel, die grundlegenden Plasmadiagnostik-Techniken zu behandeln. Eine große Anzahl spezieller Techniken konnte daher leider nicht erwähnt werden. Weiterhin werden große Anstrengungen unternommen, um neue Diagnostiken zu entwickeln und um die alten zu verbessern. Besonders der Einsatz von Diagnostiken zur Regelung von Plasmaentladungen in Echtzeit erfährt immer größere Anwendung. Der Anstieg des Strahlungsniveaus in zukünftigen D-T-Experimenten eröffnet zusätzlich den Bedarf an neuen Entwicklungen, da die Systeme strahlungsfest, wartungsarm und fernbedienbar sein müssen. Aus diesen Gründen ist die Diagnostik von Fusionsplasmen immer noch ein sehr interessantes und sich entwickelndes Gebiet, welches alle Bereiche der Physik einschließt.

### **Spezielle Literatur**

[1] Equipe TFR, *Nuclear Fusion* **18** (1978) 647.

[2] Hutchinson, I. H., *Principles of Plasma Diagnostics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[3] Orlinskij, D. V. and Magyar, G., *Nuclear Fusion* **28** (1988) 611.

[4] Wesson, J., *Tokamaks*, Clarendon Press, Oxford, 1987.

[5] Costley, A. E., Recent developments and applications of electron cyclotron emission, in *Basic and Advanced Fusion Plasma Diagnostic Techniques*, volume I, pages 119-138, 1986.

[6] Salzmann, H., Thomson scattering, in *Basic and Advanced Fusion Plasma Diagnostic Techniques*, volume II, pages 477-496, 1986.

[7] Soltwisch, H., Interferometry and Faraday rotation measurements on tokamaks, in *Basic and Advanced Fusion Plasma Diagnostic Techniques*, volume II, pages 343-378, 1986.

[8] Costley, A. E., Diagnosis of fusion plasmas using reflectometry, in *Basic and Advanced Fusion Plasma Diagnostic Techniques*, volume II, pages 379-398, 1986.



# Kapitel 11

## Experimental results from Tokamaks

### 11.1 Tokamak plasmas

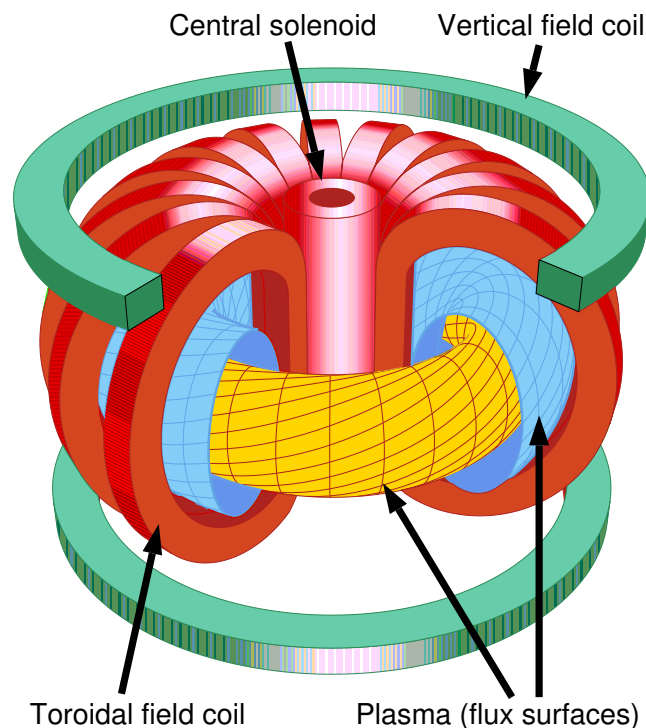


Abbildung 11.1: Schematic view of main components.

#### 11.1.1 Components of a tokamak

The main components of a tokamak are illustrated in figure 11.1. Helical magnetic field lines span nested surfaces of constant magnetic flux (*flux surfaces*). The plasma is enclosed in a vacuum chamber (not shown) which is needed to remove air and control the hydrogen pressure outside the plasma. The axisymmetric toroidal field is produced by poloidal currents in a set of magnetic coils surrounding the plasma. A central solenoid is used to produce a time-varying poloidal magnetic flux which induces a toroidal loop voltage, and due to finite plasma resistivity, a plasma current. The plasma is subject to a poloidally and radially outward directed force which results from a finite plasma pressure gradient. This force is balanced by the  $j \times B$  force

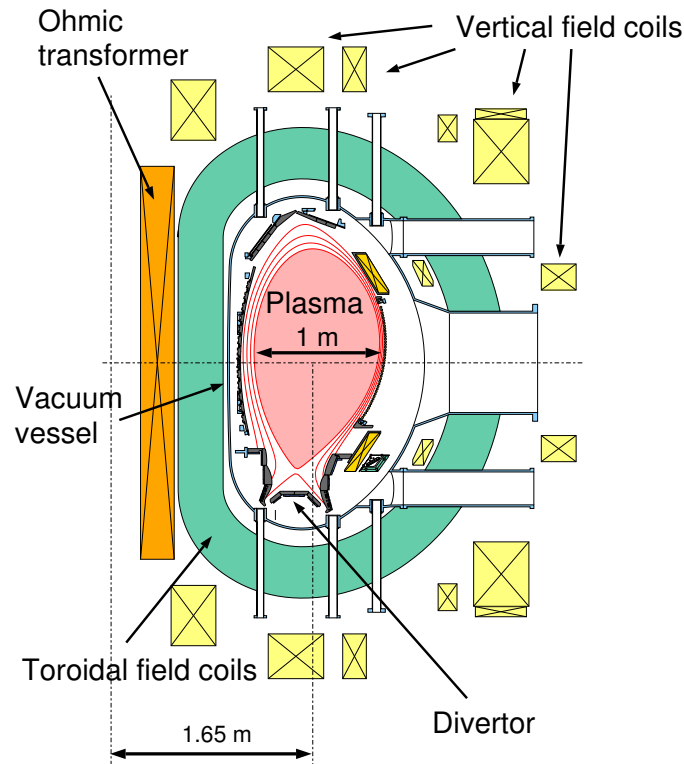


Abbildung 11.2: Cross section of ASDEX Upgrade (Axi-Symmetric Divertor Experiment), installed at Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching, Germany.

acting on the plasma current due to the helical field and an additional vertical field produced by toroidal currents in external conductors (*vertical field coils*). As an example, the poloidal cross section of ASDEX Upgrade (Axi-Symmetric Divertor Experiment) at Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching (Germany), is shown in Figure 11.2. This machine can produce plasmas with major radius  $R = 1.65$  and horizontal minor radius  $a = 0.5$  m. An array of vertical field coils is installed which do not only produce the vertical field for compensation of the radial outward force but also can create suitable poloidal fields to create a wide range of plasma shapes. Typically, vertically elongated plasmas are produced by toroidal currents in upper and lower shaping coils which have the same direction as the plasma current. This configuration is inherently unstable against vertical displacements. A small upward displacement from the equilibrium position will result in a larger attracting force on the plasma current of the upper coil current than of the lower coil, thereby amplifying the perturbation. This position instability is damped by induced currents in a passive saddle-loop near the plasma (“passive stabilizing loop”). On time scales longer than the  $L/R$  time constant of the saddle loop (about 1 ms), the vertical position is actively controlled with an external radial field, i. e. by a differential current in the upper and lower vertical field coils.

### 11.1.2 Divertor Tokamaks

Quadrupole currents in the poloidal field coils are also used to form a *magnetic divertor* configuration. Figure ?? illustrates two basic magnetic configurations of a tokamak plasma. Radial diffusion of particles and heat across the magnetic field will lead to expansion of the plasma until a material wall is intersected. Without a magnetic divertor, this first material contact will be close to the main confined plasma volume, and hence be subjected to strong heat load and particle fluxes. This region, called the *limiter*, must be appropriately designed in order to prevent



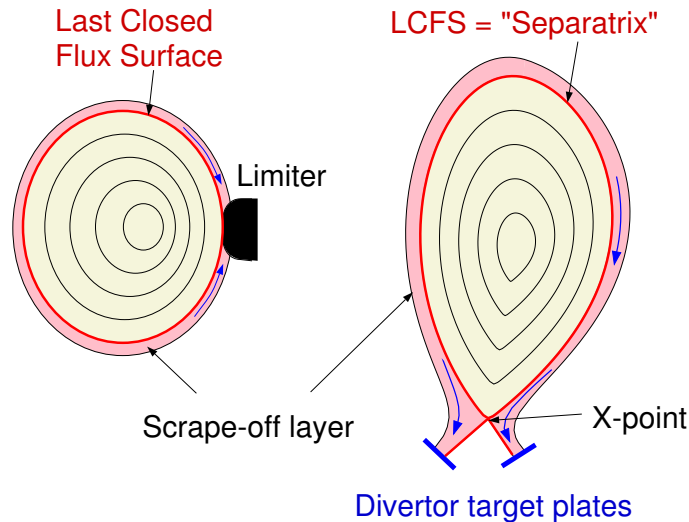


Abbildung 11.3: Limiter and divertor configurations.

excessive materials erosion. With a suitable axi-symmetric quadrupole field a magnetic X-point is introduced which defines a magnetic surface (*separatrix*) that intersects the material wall only at a distance from the main plasma. Particles and energy from the main plasma flow along field lines to a separated divertor region where particles are neutralized at the material wall (*target plates*). A fraction of the neutral particles is reflected towards the separatrix, re-ionised and is streaming back again to the target plates. This recycling flux effectively increases the plasma density in the divertor region. Under normal conditions, the plasma pressure is constant along magnetic field lines, hence the plasma temperature in the divertor is smaller than that at the separatrix near the main plasma. As a result, the erosion damage at the material wall produced by ions can be strongly reduced and cleaner plasmas are obtained compared with a limiter configuration. This favourable property of divertors is exploited in most modern magnetic fusion devices, both tokamaks and stellarators.

## 11.2 Tokamak plasma discharges

Figure 11.4 shows for a typical tokamak discharge (example taken from the ASDEX Upgrade tokamak) several measurements as a function of time. After start-up of the discharge, the plasma current  $I_p$  is ramped up within one second to its flat-top value of 1 MA. The discharge is terminated after 6.5s by a ramp down of  $I_p$ . The same panel shows  $I_{OH}$ , the current in the central solenoid needed to achieve the requested plasma current: Before the start of the pulse,  $I_{OH}$  is set to 40 kA. Initially, a large loop voltage (second panel) is needed for break-down. This is achieved with a fast step in  $I_{OH}$ . During current ramp up, large flux is consumed due to the inductance of the plasma. During current flat top, flux consumption depends on plasma resistivity. In our example, neutral beams are injected during two time intervals (1.5 - 3s and 5 - 6.5 s) resulting in an increase of plasma temperature and consequently a decrease of resistivity. This results in the measured reduction of the loop voltage and reduced ramp rate of  $I_{OH}$  during the time intervals with auxiliary heating.

Details of the start-up phase of this discharge are shown in Fig. 11.5. A carefully dosed amount of deuterium gas (*gas prefill*) is introduced into the vacuum chamber and then a fast step of  $I_{OH}$  is applied to generate a large loop voltage. This results in ionisation of the neutral gas. The

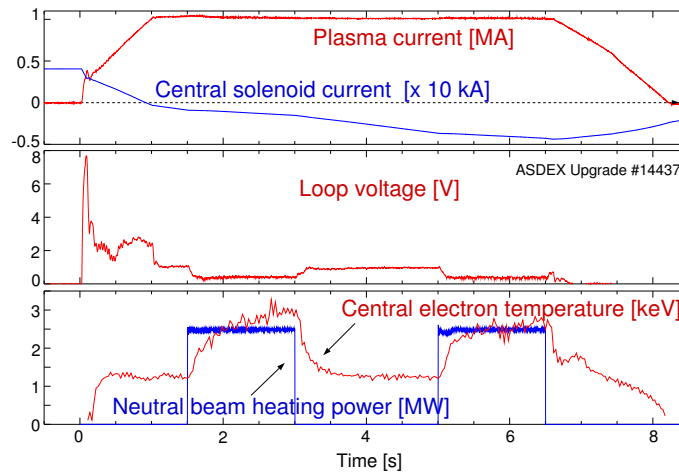


Abbildung 11.4: Measured time traces for a tokamak plasma during start and plasma current ramp-up phase, flat-top phase, and ramp-down phase.

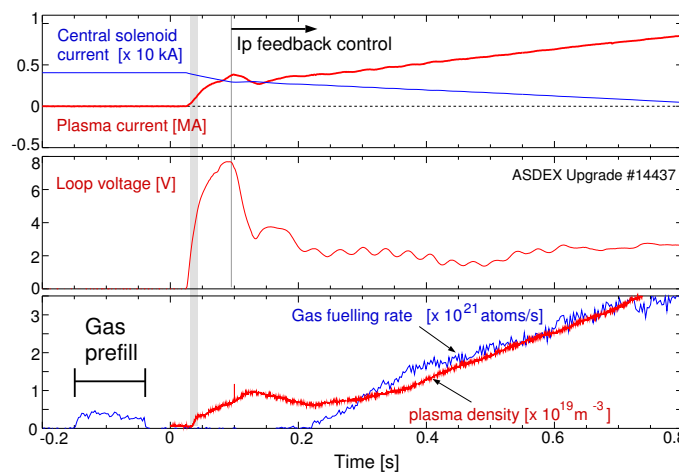


Abbildung 11.5: Start-up phase of a tokamak plasma: A high loop voltage, generated by a fast central solenoid current ramp, ionises an initial neutral gas prefill.

resulting free electrons are accelerated and help to further ionize the neutral gas. The plasma density (bottom panel) rises along with the plasma current. After about  $t = 100\text{ms}$ , the plasma current is feedback-controlled and slowly ramped up. After  $t = 200\text{ms}$  the plasma density is also feed-back controlled with the gas fuelling rate.

## 11.3 Experimental results

### 11.3.1 Confinement and transport

#### Confinement time

One of the main requirements for a nuclear fusion plasma is a sufficiently large *energy confinement time*, defined as  $\tau_E = W_{th}/P_{heat}$ , where  $W_{th}$  is the thermal stored energy and  $P_{heat}$  the heating power required to obtain this energy. The confinement time is a major figure of merit for tokamak performance and is relatively easy to measure. The heating power is the sum of Ohmic heating ( $V_{loop} \times I_p$ ) and auxiliary heating power, plus alpha particle power (small in today's tokamaks). The thermal stored energy can be obtained from density and temperature profiles, or

approximated by the total stored energy (e. g. from diamagnetic measurements), corrected for the measured or estimated energy of fast (non-thermal) particles, which mainly depends on heating method, heating power and plasma density. Figure 11.6 shows a scaling of the confinement time (experimental vs. predicted  $\tau_E$ ) for a relatively large number of tokamak experiments with different plasma size. This scaling, termed IPB98(y), is used to predict the performance of the planned International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER) from present-day machines and has the form

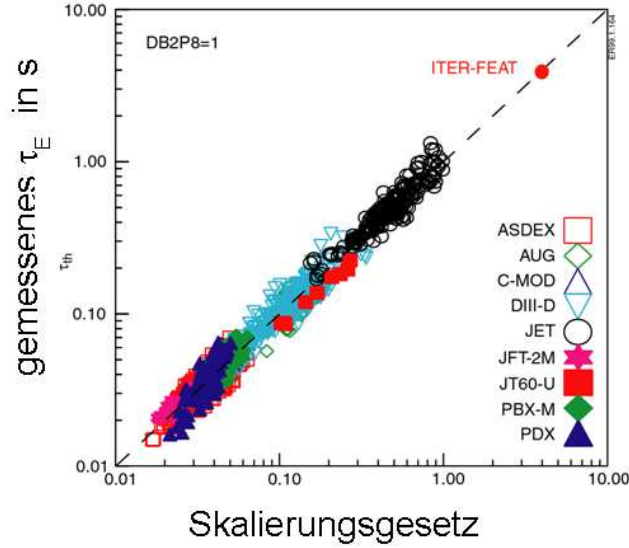


Abbildung 11.6: Energy confinement time scaling of the International confinement database for a large set of tokamaks.

$$\tau_{E,IPB98(y)} = 0.0365 I_p^{0.97} B_t^{0.08} P_{heat}^{-0.63} n_e^{0.41} M^{0.2} R^{1.93} \varepsilon^{0.23} \kappa^{0.67} \quad (11.1)$$

$\tau_{E,IPB98(y)}$  is the predicted confinement time in seconds,  $I_p$  plasma current in MA,  $B_t$  toroidal magnetic field in T,  $P_{heat}$  auxiliary heating power in MW,  $n_e$  line averaged electron density ( $10^{19} m^{-3}$ ),  $M$  ion mass number,  $R$  major radius (m),  $\varepsilon = a/R$ ,  $\kappa$  is the elongation (ratio of vertical and horizontal minor plasma radius). Energy confinement depends most strongly on plasma current  $I_p$ , plasma size (radius  $R$ ) and elongation  $\kappa$ . The experimental data base spans more than two orders of magnitude of  $\tau_E$  in similar plasma types (High confinement mode, see section 11.3.2 below). ITER is designed for  $\tau_E \approx 3s$ , which is less than a factor of 5 above the largest confinement times obtained in tokamaks to date. Naturally there are uncertainties with such extrapolations, originating from variance in the data base, and possible physics regime changes from current experimental parameters to a reactor-size plasma. It is therefore interesting to study the physics of heat transport in more detail.

### Heat diffusion

Heat transport can be expressed in terms of a local power balance for the electron and ion heat conduction channels

$$q_{\perp e,i} = -n_{e,i} \chi_{e,i} \nabla T_{e,i} \pm Q_{e,i} \quad (11.2)$$

where  $\chi_{e,i}$  is the *heat diffusivity*,  $n_{e,i}$  the density,  $\nabla T_{e,i}$  the temperature gradient and  $q_{\perp,e,i}$  the heat flux of the considered species (electrons or ions).  $Q_{e,i}$  is the collisional heat transfer between electrons and ions. For “random walk” radial diffusion dominated by Coulomb collisions, one expects a diffusivity of the order of  $\chi_{e,i} \approx (\Delta x)^2 / \tau_{e,i}$  where  $\Delta x$  is the radial step size (gyroradius for classical diffusion, banana orbit width for neo-classical diffusion in a toroidal plasma) and  $\tau_{e,i}$  is the electron-ion collision time. However, it is found that the actual diffusivity in tokamak plasmas is normally significantly larger than the neo-classical value. In addition, heat diffusivity increases with increased heat flux. Historically, this behaviour has been termed “anomalous” transport and it is now known to originate from small-scale turbulence which creates fluctuating poloidal electric fields (see chapter 8).

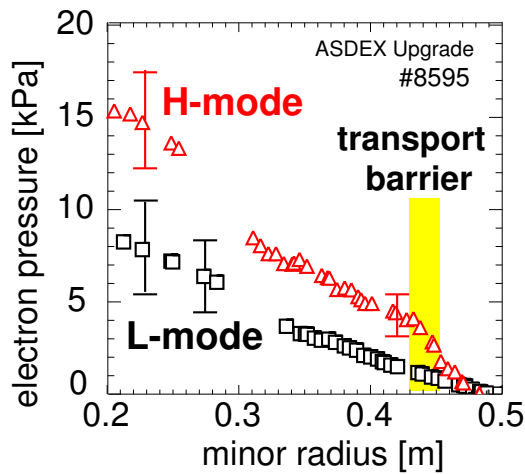


Abbildung 11.7: Comparison of electron pressure profiles in L-mode and H-mode.

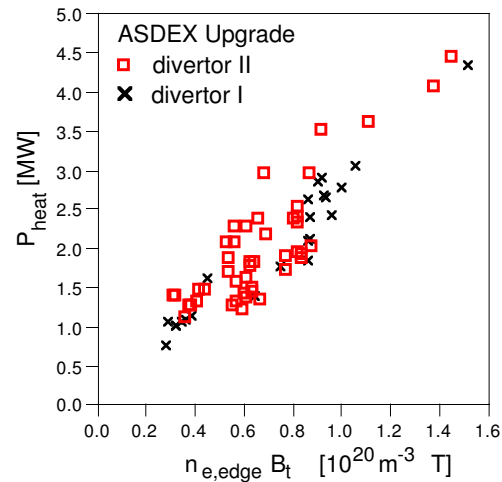


Abbildung 11.8: Experimental power threshold for barrier formation.

### 11.3.2 Confinement improvement

#### High-confinement mode

The level of radial particle and energy transport found in tokamaks is mainly caused by small-scale turbulence. Nevertheless, suppression of this turbulence can be observed in specific cases, leading to a reduction of the particle and heat diffusivity in a restricted plasma volume. This behaviour is often called the formation of a *transport barrier*. With the introduction of a divertor, spontaneous formation of a transport barrier at the plasma edge has been found in the ASDEX tokamak (Garching, 1984). This regime has been termed the *high-confinement mode* (“H-mode”). The effect of the edge transport barrier is demonstrated in Fig. 11.7 for a discharge of the ASDEX Upgrade tokamak before and after transition to H-mode. Since the discovery of H-mode, the plasma state before the transition to H-mode is usually termed “L-mode” (*low confinement mode*). In H-mode, the pressure gradient steepens up at the plasma edge (between  $r = 0.43$  and  $0.45\text{m}$  for the profile shown), giving rise to a pressure “pedestal”, i. e. additional stored energy in the plasma from the pressure offset at the edge. The temperature just inside the transport barrier is significantly higher than in L-mode, allowing (for the same gradient length  $L_T = T / \nabla T$ ) a higher plasma core temperature gradient than in L-mode, resulting in an additional confinement benefit. The condition to enter High-confinement mode is a minimum heating power across the plasma boundary. Empirically, the threshold power depends on the product of plasma edge density and magnetic field,  $P_{heat} \propto n_{e,edge} \times B_t$ . Fig. 11.8 illustrates

this dependence for the case of two divertor geometries in ASDEX Upgrade. Little influence of the divertor geometry (and other parameters such as heating method) is found.

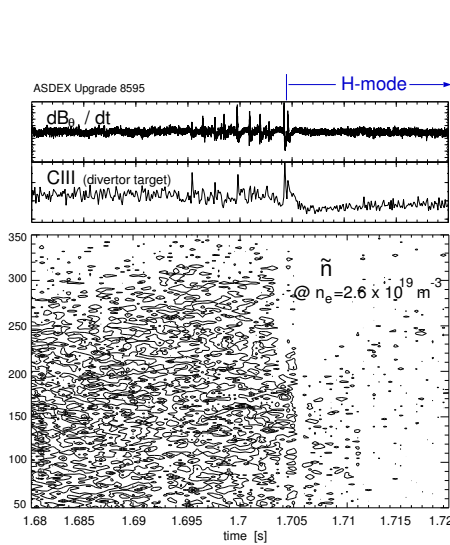


Abbildung 11.9: Fluctuations are reduced at the transition from L-mode to H-mode.

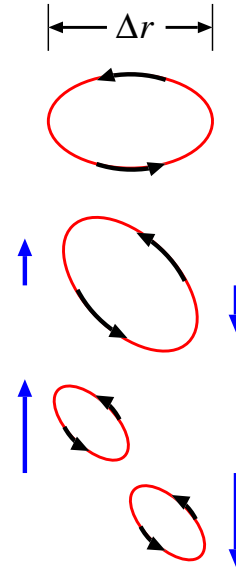


Abbildung 11.10: H-mode model:  $E \times B$  shear flow reduces radial size of turbulent eddies.

A typical time history around the transition to H-mode is shown in Fig. 11.9. The heating power is being stepped up to just above the H-mode threshold at  $t = 1.65\text{ s}$ . Large heat flux in L-mode leads to turbulence that can be seen as broad-band density fluctuations in the  $\tilde{n}$  spectrogram contour plot. Transport occurs in bursts that appear in the divertor heat flux ( $CIII$  spectral line intensity) and main plasma magnetic probes ( $\dot{B}$ ). After the transition to H-mode (at  $t = 1.705\text{ s}$  in the example), the level of density fluctuations is much reduced and the  $CIII$  signal in the divertor drops.

While in L-mode additional heating power creates steeper gradients and thus generates more free energy to drive turbulence and enhanced losses, it can also trigger a transition to H-mode, a self-organising process that results in a bifurcation to a state of reduced transport. This transition to H-mode is accompanied with the creation of a radial electrical field gradient, corresponding to sheared rotation of the centers of the particle gyro-motion. It is believed that de-correlation of turbulent  $E \times B$  convection cells by sufficiently fast sheared rotation is the origin of the transport reduction (see Fig. 11.10). However, although a number of possible mechanisms has been proposed the physics that drives the radial electrical field is still unknown and subject to ongoing research effort.

### Internal Transport Barriers

Transport barriers can exist not only at the plasma edge, but also in the plasma core, causing steep temperature and/or density profiles, thereby increasing the central pressure. *Internal transport barriers* (ITB) arise from an influence of the magnetic shear  $s = (r/q) dq/dr$  on the growth of micro-instabilities and thereby the heat diffusivity. In conventional tokamak plasmas without ITB,  $q$  increases monotonically from the center towards the edge, i. e. the magnetic shear is positive across the entire plasma radius. It is observed that heat transport can be reduced at low or negative magnetic shear. Fig. 11.11 shows profiles of the electron and ion temperature

and the safety factor  $q$  in a discharge with ITB in the ASDEX Upgrade tokamak. The  $q$  profile is flat or slightly reversed inside a normalized radius of  $\rho = 0.6$ . A strong ion temperature gradient is maintained around  $\rho = 0.4$ , leading to a central ion temperature of 15keV. This temperature, obtained in a tokamak much smaller than an envisaged fusion reactor, is near the optimum temperature for D-T fusion reactions. Figure 11.12 shows how this result is achieved. A conventional plasma (shot # 13155) is compared with an ITB discharge (#13148). In the ITB pulse, heating power is applied early in the plasma current ramp, resulting in higher  $T_e$ . Due to the increased resistive skin time the initial flat or slightly hollow plasma current profile remains “frozen” for the duration of the experiment. This is seen by the slow evolution of the *internal inductance*  $l_i$  which indicates by its lower value after  $t = 0.45s$  a broader (less peaked) current profile.

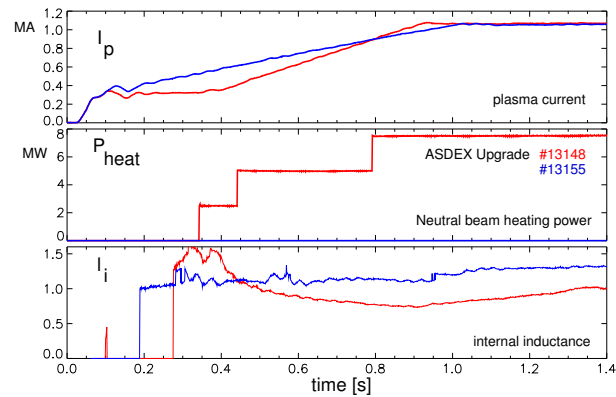
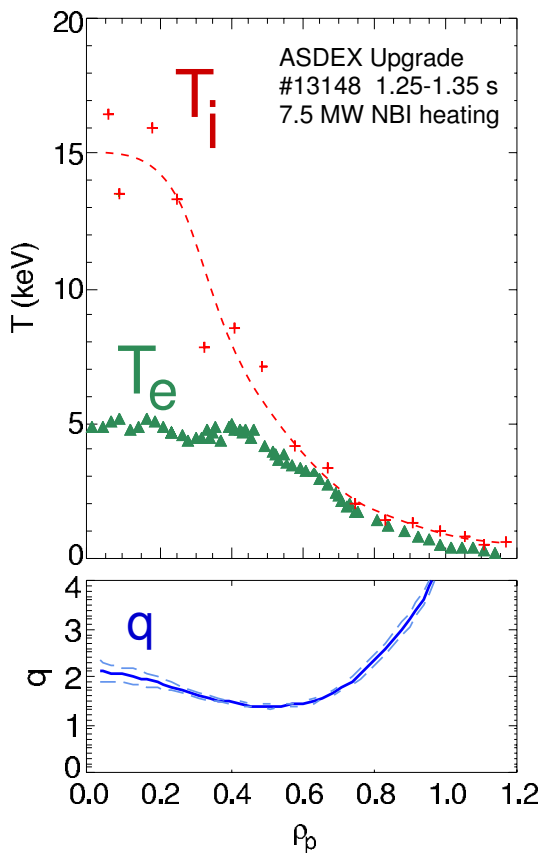


Abbildung 11.12: Comparison of discharges with (#13148) and without (#13155) ITB: Early heating during the current ramp leads to broader current profile as seen by a reduced value of  $l_i$ .

Abbildung 11.11: Internal transport barrier example: profiles of  $T_i$ ,  $T_e$  and safety factor  $q$ .

### The “Advanced” Tokamak

For truly stationary tokamak operation the plasma current has to be driven entirely non-inductively, for example by the bootstrap effect due to the pressure gradient in the plasma. This leads to the interesting concept of the *Advanced Tokamak*, where the bootstrap current profile maintains the low or reversed shear profile required for the transport reduction which causes the ITB. Fig. 11.11 compares profiles of the pressure, toroidal current density and safety factor  $q$  (assuming pure Ohmic or pure bootstrap current) for both a “conventional” (non-ITB) and an ITB plasma. In the conventional scenario the Ohmic (inductively driven) current dominates. The Ohmic current density profile is fixed by the conductivity (electron temperature) profile. A sufficiently



strong transport barrier can, in principle, sustain a reversed shear profile. The strong pressure gradient produced by the transport reduction creates a strong off-axis bootstrap current. The resulting non-monotonic current profile maintains the weak or negative magnetic shear profile that allows to sustain the transport barrier. A tokamak reactor with an ITB and this type of “self-generated” plasma current could be built smaller than a conventional tokamak and would allow true steady-state operation. A crucial condition is the alignment of the reversed shear region with the region of actual strong pressure gradient, which if not matched, leads to rapid changes of the radial position of the transport barrier. A (small) current profile correction can be applied non-inductively by external current drive techniques, e. g. by electron cyclotron or lower hybrid wave heating with toroidal component of the wave vector (see chapter 9). Advanced tokamak scenarios with a variety of current drive methods are an important topic in most current tokamak research programs.

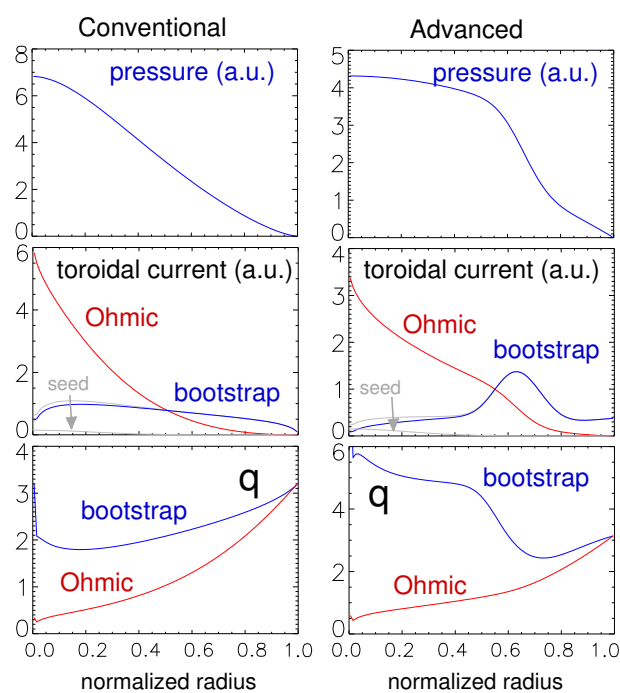


Abbildung 11.13: Profiles of plasma pressure  $p$ , current density  $j$  and safety factor  $q$  comparing conventional and advanced scenarios. A conventional plasma has a monotonously rising  $q$  profile. Flat or reversed  $q$  profile can lead to a transport barrier. In an ideal advanced scenario, the resulting steep pressure gradient creates a bootstrap current that maintains the  $q$ -profile non-inductively in steady state. Ohmic and bootstrap contributions to  $j$  and  $q$  are shown separately.

### Stability and operational limits

Instability occurs if a plasma perturbation amplifies itself and grows until the plasma configuration is severely modified. Free energy sources for instability growth arise for instance from large gradients of pressure and currents present in a fusion plasma. Many instabilities involve displacements of magnetic surfaces (*MHD instabilities*), but also other types of instabilities exist, for example radiation instability originating from increased radiated power with decreasing temperatures. MHD instabilities are distinguished by their scale: Micro-instabilities (see chapter 8) occur on the gyro-radius scale and are relevant for radial particle and heat transport. Macroscopic instabilities affect the plasma on the scale of the plasma dimensions and can

have large effects on confinement or even terminate a plasma discharge (see chapter 5). In toroidal geometry one can characterize unstable modes by their integer toroidal ( $n$ ) and poloidal ( $m$ ) mode numbers. Most macroscopic MHD modes can become unstable only at “resonant” surfaces, i. e. magnetic surfaces where  $q = m/n$ , and  $n$  and  $m$  are small numbers. At finite aspect ratio, modes with different poloidal mode number  $m$  couple, giving rise to complex mode number spectra. Instabilities are important as they define the accessible plasma parameter range for stable tokamak operation. Subsequently, we discuss the basic tokamak operation range and examine several important types of instabilities and their effects.

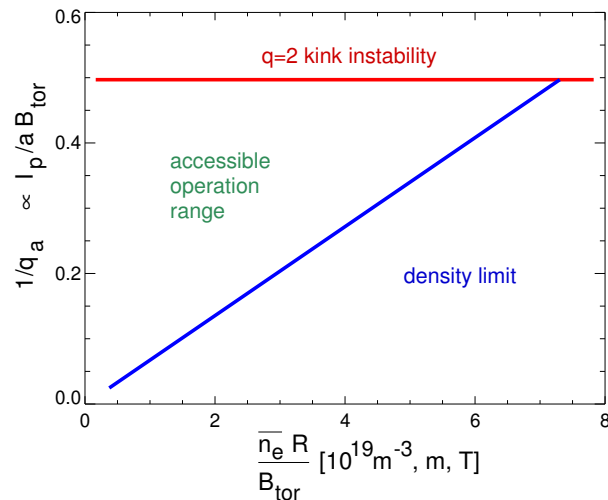


Abbildung 11.14: Hugill-Diagramm showing the basic tokamak operational range. An upper limit to the plasma current is given by the onset of  $n = 1, m = 2$  kink instability for  $q = 2$  at the plasma edge. A density limit exists at  $\bar{n}_e \propto B_t / (Rq) \propto I_p / a^2$ .

### Tokamak operational limits

For stable tokamak operation, there are upper bounds for the plasma current and the plasma density. Figure 11.14 shows a schematic diagram of the accessible parameter range in a plot of  $1/q_a$ , the reciprocal edge safety factor vs.  $\bar{n}_e R / B_t$  (known as *Hugill diagram*). We note that  $1/q_a \propto I_p / B_t$ , so the vertical axis is proportional to the plasma current. For  $1/q_a \rightarrow 0.5$  the  $q = 2$  surface approaches the plasma edge and a  $m = 2, n = 1$  “kink” instability occurs. This is a fast-growing large scale ideal MHD mode which leads to a quick termination of the plasma discharge.

Empirically, a density limit is found which is proportional to the plasma current density. In the Hugill diagram (Fig. 11.14) this is expressed by an upper bound of the line averaged density  $\bar{n}_e R / B_t \propto I_p / a B_t$  or  $\bar{n}_e \propto I_p / a R \propto I_p / a^2$  (for constant aspect ratio  $R/a$ ). The physics of the density limit is quite complex, and some of its aspects are outlined in the next section.

The accessible operation range of tokamaks is bounded by these limits. High plasma density is desirable for good performance and to facilitate power exhaust with a divertor. For a tokamak reactor it is therefore desirable to operate at highest possible plasma current density. The maximum value of  $B_t$  is defined by technical limitations for toroidal field coil system. Hence, the  $q = 2$  limit sets an upper bound to  $I_p$ . From these considerations, the optimum operation point is in the upper right corner of the Hugill plot.



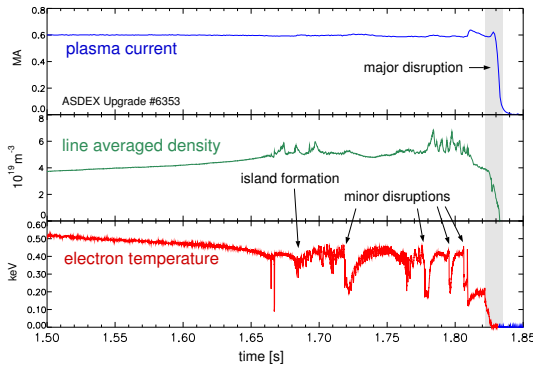


Abbildung 11.15: History of a density limit disruption. With increasing density the plasma edge is cooled and magnetic islands grow. Finally a “major” disruption occurs with thermal and plasma current quench.

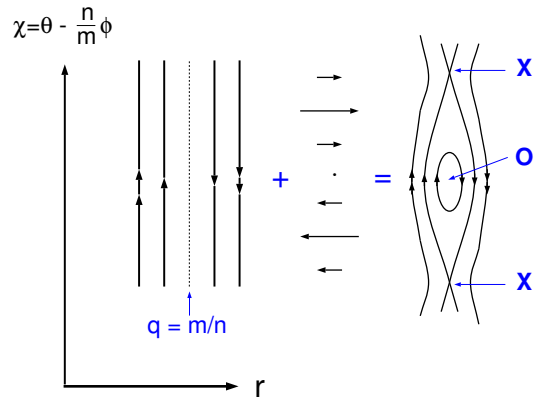


Abbildung 11.16: Formation of magnetic islands by superposition of an unperturbed sheared magnetic field and a helical  $B_r$  field.

### Density limit disruptions

The density limit in tokamaks can assume quite complex phenomenology. A typical history of a density limit in a discharge with only Ohmic heating is shown in Fig. 11.15. In this experiment, the line averaged density is slowly raised by gas puffing. The edge electron temperature (bottom trace) reduces with increasing density. When the edge has sufficiently cooled down, *tearing mode* instability occurs which results in the formation of magnetic islands by reconnection. Figure 11.16 shows the structure of magnetic islands (in helical and radial coordinates). Magnetic islands result from helically periodical perturbation currents which give rise to a radial magnetic field with helical symmetry. They can grow only at resonant rational surfaces, i. e. where  $q = m/n$ . At the density limit, several islands with  $m/n = 4/1, 3/1$  and  $2/1$  appear. Since heat transport is much faster along magnetic field lines than perpendicular to the field, radial heat flux effectively bypasses the island interior (*O-point*) and concentrates near the X-point. Consequently the temperature is flat inside the island, while near the X-point a gradient is maintained. Plasma rotation makes this modulation visible as an oscillation of the temperature (bottom panel in Fig. 11.15). After islands have grown to a certain radial extent, fast confinement loss events (*minor disruptions*) occur, which lead to a flattening of the temperature profile around a resonant surface. The volume inside this surface cools down and islands on inner resonant surfaces begin to grow. After several minor disruptions, several island chains can exist simultaneously and the rotation velocity reduces to zero (*mode locking*). A *major disruption* occurs, with a fast loss of plasma energy (*energy quench*) and subsequent quench of the plasma current. Because of the inductivity of the plasma, the plasma current quench results in *halo currents* in the vacuum vessel wall, which lead to very large forces on the material structure of a tokamak. The vacuum vessel and the support structure of all magnetic coils must be designed to withstand these forces. Nevertheless, the disruptive termination of a plasma can be avoided or at least mitigated. If the density is kept below the density limit, the phenomenology described above does not occur. If the density limit is encountered, one can delay tearing mode growth by localized electron cyclotron current drive which replaces the missing helical current in the O-point. Several techniques have been successfully applied to delay or avoid mode locking. Finally, during a disruption the kinetic and magnetic energy in the plasma can be disposed by radiation from injected impurities leading to a more even distribution of energy deposition on the walls, and a reduction of halo currents.

The physics mechanism at the onset of the density limit are still under investigation. Several observations can be made depending on the confinement regime: Increase of radial transport at the edge leading to edge cooling and breakdown of the H-mode barrier; *detachment* of the divertor, i. e. loss of the parallel pressure balance between main chamber edge and divertor due to radial momentum transfer, and formation of a poloidally asymmetric condensation instability (“MARFE”) which leads to edge cooling. Several mechanisms can drive magnetic island growth: Deformations of the current profile, and helical current perturbations due to radiation losses from the island interior or loss of the bootstrap current because of pressure profile flattening around the O-point. The interplay of these mechanisms is being studied in experiments and by complex computer simulations.

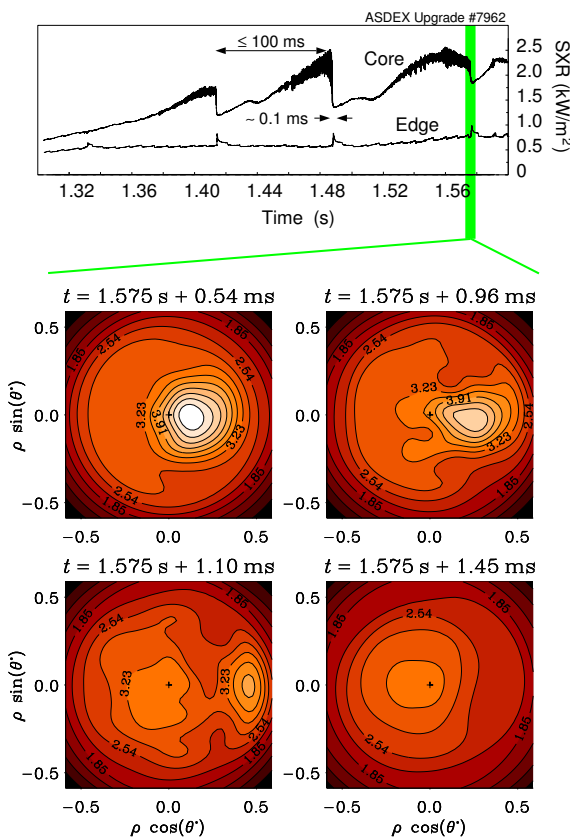


Abbildung 11.17: Sawtooth oscillations as seen by Soft X-ray measurements. Bottom: Tomographic reconstruction of Soft X-ray emissivity before, during and after the sawtooth crash.

### Sawtooth oscillations

In many tokamak discharge scenarios, the central temperature undergoes a characteristic oscillation: After a slow linear rise (of few to several 100ms duration) the temperature crashes very quickly (within about 100  $\mu$ s) and the cycle repeats. This behaviour has been first observed in the central soft x-ray emissivity and has been named “sawtooth” oscillations for its peculiar time history (Fig. 11.17, top panel). X-ray tomography can be used to reconstruct a two-dimensional image of the central emissivity which reveals the structure of the underlying perturbation. The

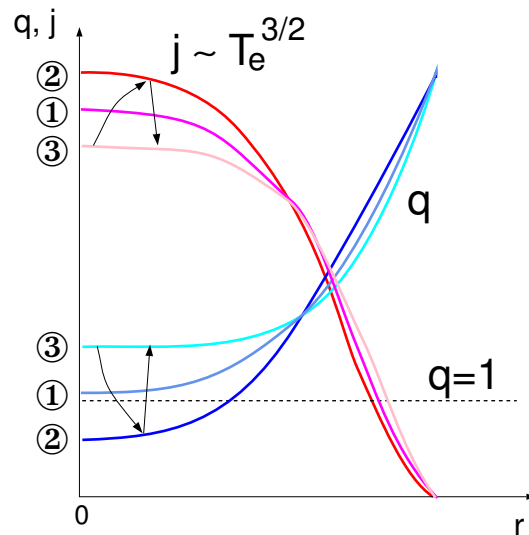


Abbildung 11.18: Profiles of  $j$  during a sawtooth cycle.

lower part of Fig. 11.17 shows the reconstructed X-ray emissivity for four phases before, during and after the sawtooth crash. In between sawtooth crashes the plasma center is heated and the central temperature increases. If  $q(0) < 1$ , an  $n = 1, m = 1$  kink mode is destabilised. Because of the toroidal plasma rotation, the difference of temperatures inside and outside the kink structure appears as fast oscillations (black areas) in the X-ray signals (Fig. 11.17 top). With increasing central current density the structure becomes unstable and reconnection sets in ( $t = +1.45ms$ ). Figure 11.18 schematically shows the temporal evolution of the profiles of the central current density and associated safety factor  $q$ . In between sawtooth crashes,  $j(0)$  (and  $T_e(0)$ ) both rise, resulting in a drop of central  $q(1)$ . Eventually  $q(0)$  falls significantly below unity (2). A quick reconnection event flattens the central  $j$  (and  $T_e$ ) profile and  $q$  rises again above one; the cycle starts over.

### Edge Localized Modes

*Edge Localized Modes* are instabilities that occur in H-mode where a transport barrier leads to a steep pressure gradient at the plasma edge. The edge temperature (shown in Fig. 11.19, top time trace) and edge density (not shown) increase until sudden heat and particle losses occur. These losses can be detected as a characteristic spike in the  $D_\alpha$  line radiation intensity in the divertor due to increasing recycling particle flux and increasing ionisation because of the heat loss (Fig. 11.19, bottom trace). The particle and heat losses are also seen as a sudden partial erosion of the edge temperature and density profiles (Fig. 11.20). Steep profiles (A) in the edge barrier region before ELMs flatten within few  $100 \mu s$  (B) and recover slowly (C) by radial heat and particle transport from within the plasma core until the maximum pressure is reached again and a new ELM occurs. This results in a characteristic oscillation cycle which repeats itself many times, often hundreds of times in one plasma discharge. Along with hydrogen, also impurities are lost which otherwise tend to accumulate in the main plasma due to the very slow out-diffusion across the H-mode transport barrier. While this feature of ELMs allows for stationary H-mode plasmas, the fast energy loss during the collapse phase can present a large peak power load to the divertor structure which can cause significant erosion of the divertor structure. For this reason, ELMs with small losses occurring at a high frequency are preferred over slow and large ELMs. The precise physical origin of ELMs and the nature of the instability are still under investigation. The phase of enhanced transport during ELMs is characterized by a broad spectrum of MHD modes with a duration of about  $100 \mu s$ .

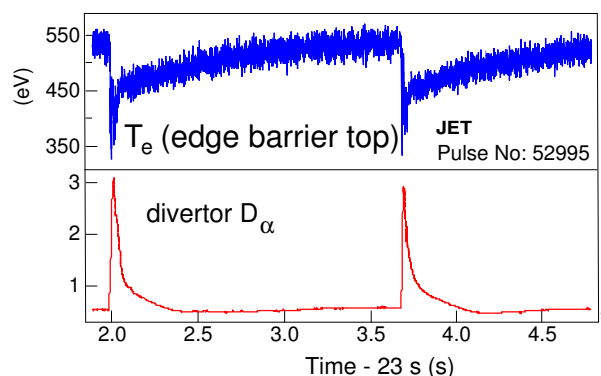


Abbildung 11.19: Time traces of edge electron temperature and divertor  $D_\alpha$  showing repetitive losses at the edge and increased recycling during ELMs.

ELMs set in near values of the total edge pressure gradient where one expects *ballooning* instability, i. e. short wavelength modes driven by the pressure gradient at the magnetic low field

side where the curvature of the magnetic field is not stabilizing. Fig. 11.21 shows a stability diagram for ballooning modes. The attainable normalized pressure gradient (first stability limit)  $\alpha = 2\mu_0 R (\nabla p) q_a^2 / B_t^2$  increases with magnetic shear  $s = (r/q) dq/dr$ . Interestingly, at low shear a second stable regime can exist. Low local shear at the magnetic low field side can be produced by suitable plasma shaping or by high edge current density.

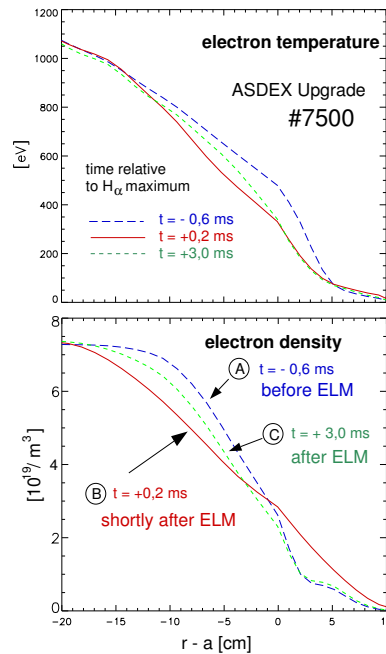


Abbildung 11.20: Edge electron temperature and density profiles (A) before an ELM, (B) shortly after an ELM, (C) in the recovery phase in between ELMs.

Ballooning modes are typically small scale modes, most unstable for high mode numbers and thus do not explain the large perturbations associated with ELMs. Furthermore, it is often observed experimentally that the pressure gradient saturates well before an ELM occurs indicating a more complex physics process involved. Recent models for ELMs consider a variety of instabilities, including modes driven by the large toroidal current gradient at the plasma edge. A large edge current density originates from the bootstrap current driven by the large edge pressure gradient in the H-mode transport barrier. In this picture the ELM cycle can be described as follows (Fig. 11.22): In between ELMs (1) the (normalized) pressure gradient  $\alpha$  rises on the transport time scale (few ms for heat and particle diffusion over a few cm) until the ballooning pressure gradient limit is reached. Small scale instability leads to enhanced losses, effectively clamping the pressure gradient while the edge current density  $j_{\parallel}$  builds up within the resistive skin time (10 to 100 ms for the edge of current tokamaks). Ultimately the stability limit for coupled peeling (i. e. medium- $n$  kink) and ballooning modes is reached, leading to macroscopic instability, the ELM crash (3). Pressure and current are expelled and the cycle repeats itself. Current theoretical and experimental work focuses to understand and predict the magnitude of the ELM losses and to tailor the plasma edge in order to reliably obtain ELM types with smaller energy losses.

### 11.3.3 Summary and Outlook

Tokamaks can confine a nuclear fusion plasma with a combination of external toroidal field and poloidal magnetic field created by an internal plasma current. The plasma current can be driven inductively by a magnetic flux ramp created with a central solenoid which limits the duration

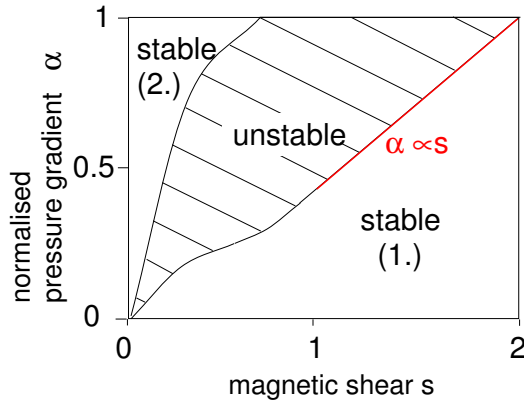


Abbildung 11.21: Stability diagram for ballooning modes. Stability occurs for high magnetic shear (“first” stable regime) or very low magnetic shear (“second” stable regime). Access to the second stable regime is sometimes blocked by an unstable region as shown.

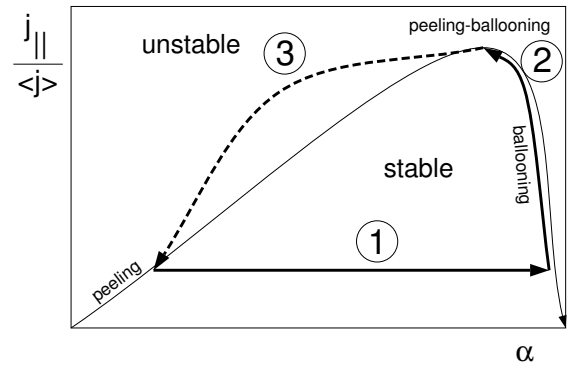


Abbildung 11.22: Schematic model for the ELM cycle: Different time scales for evolution of edge pressure gradient  $\alpha$  and edge current density  $j_{\parallel}$  result in several stability limitations during the cycle (see text).

of tokamak discharges. Non-inductive current drive by externally driven current or bootstrap (pressure gradient) current can extend the pulse duration and possibly allow stationary tokamak operation. Heat and particle transport in tokamaks is usually dominated by fluctuating  $\vec{E} \times \vec{B}$  convection from micro-instabilities which are driven by the strong temperature gradients. However, transport barriers at the plasma edge and in the plasma interior can be produced which reduce the heat diffusivity to near a level expected for collisional transport. The strong pressure and current density gradients present in a well-confined tokamak plasma can also drive a range of macroscopical instabilities, which often take the form of limit-cycle oscillations. Examples are sawtooth oscillations, associated with central  $m = 1, n = 1$  kink modes that undergo fast reconnection events and a flattening of the central temperature, and Edge Localized Modes, driven by the steep pressure gradient of an edge transport barrier resulting in repetitive energy and particle losses. While these instabilities do not prevent stationary plasma operation and in some cases even help avoiding accumulation of impurities, other instabilities lead to severe confinement deterioration or even a termination of the plasma. The accessible tokamak parameter range is bounded by the conditions to avoid these instabilities. The historical progress of nuclear fusion research can be measured by the fusion triple product  $nT_i\tau_E$  which is plotted in Fig. 11.23 as a function of  $T_i$  for tokamaks and other magnetic confinement devices (mostly stellarators). The values of  $nT_i\tau_E$  have increased over several orders of magnitude in the last few decades and plasma temperatures and densities needed for a fusion reactor are obtained in contemporary tokamaks. In order to reach ignition (self-sustained plasma heating by alpha particles resulting from fusion reactions) an increase of the energy confinement time to values of several seconds is needed. This can be achieved by a larger plasma size, such as that of the planned International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER), a tokamak with major radius  $R = 6.2$ , about twice as large as that of the presently largest tokamak, JET ( $R = 3m$ ). The step to a reactor-scale experiment with large fusion power and significant neutron production will allow to study dominant plasma heating by fast alpha particles, confinement and plasma-wall interaction, and test first-wall and low activation structural materials needed for an integrated power plant concept. Alternative confinement concepts such as stellarators will further develop and demonstrate their attractive potential in new experiments, for example for steady state

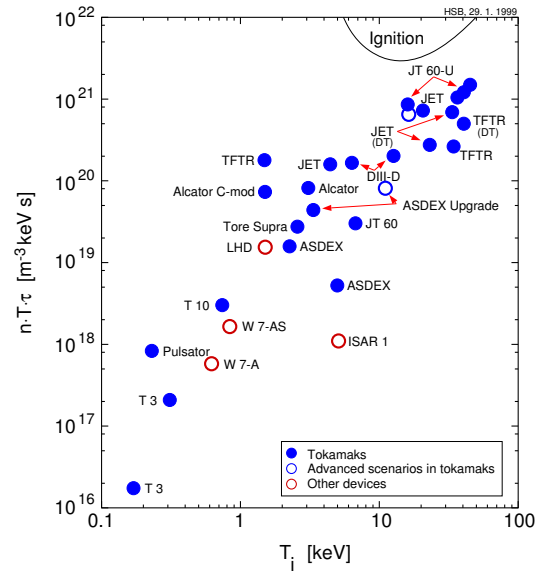


Abbildung 11.23: Historical performance of tokamaks and other devices, fusion triple product  $nT_i\tau_E$  as a function of  $T_i$ .

operation. Nevertheless, one can expect that tokamaks will remain at least for some foreseeable future the reliable “workhorse” and universal test-bed for magnetic fusion research they have been in the last three decades. Literatur