

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen der Plasmaphysik</b>	<b>3</b>
<b>2 Stöße im Plasma</b>	<b>17</b>
<b>3 Thermodynamisches Gleichgewicht</b>	<b>29</b>
<b>4 Diffusion und Transport</b>	<b>43</b>
<b>5 Plasmarandschicht</b>	<b>53</b>
<b>6 Gasentladungsphysik</b>	<b>63</b>
<b>7 Teilchenbewegung in elektrischen und magnetischen Feldern</b>	<b>81</b>
<b>8 Vielteilchenbeschreibung von Plasmen (kinetische Theorie)</b>	<b>97</b>
<b>9 Flüssigkeitsbeschreibung von Plasmen</b>	<b>107</b>
<b>10 MHD Gleichgewicht und Stabilität</b>	<b>117</b>
<b>11 Wellen im Plasma</b>	<b>127</b>
<b>12 Hochfrequenz-Entladungen</b>	<b>145</b>
<b>13 Plasmaanwendungen (Plasmatechnologie)</b>	<b>153</b>



# Kapitel 1

## Grundlagen der Plasmaphysik

### Plasmaeigenschaften

Mit steigender Temperatur - typisch jenseits  $10.000 \dots 20.000^\circ$  - geht die Materie nach "fest", "flüssig" und "gasförmig" in den **Plasma**-Zustand über. Wesentliches Merkmal ist: neutrale Atome bzw. Moleküle werden **ionisiert**. Es entstehen positiv geladene, freie **Ionen** (auch Molekülionen sind möglich!) und die zugehörigen freien **Elektronen**. Die geladenen Teilchen üben neue, viel stärkere Wechselwirkungen aufeinander aus (Coulomb-Kräfte!) und es folgt völlig neues Materieverhalten (= "Plasma"). Aufgrund der Existenz frei beweglicher Ladungsträger (wie in einem Metall!) wird das Plasma zugleich zu einem guten elektrischen Leiter. Auch Magnetfelder üben über die Lorentzkraft  $K = q \cdot [v \times B]$  eine starke Wirkung auf ein Plasma aus: Aufgrund der Gyrationbewegung (vgl. Kapitel 7) werden die um die Feldlinien kreisenden (gyrierenden) Ionen und Elektronen zu kleinen "Stabmagneten". Wie man leicht erkennt (Lorentzkraft, Richtung der Gyration!) entspricht das Verhalten dem eines Diamagneten (= Abschwächung des äußeren Feldes!).

Schließlich erzeugen die energetischen Plasma-Elektronen über Anregungsstöße, über Stöße mit Ionen sowie durch Kreisbewegungen in Magnetfeldern (wenn vorhanden) eine elektromagnetische Strahlung (d. h. Emission von **Photonen**) in einem weiten Spektralbereich (Mikrowellen bis Röntgenstrahlung).

Daraus ergeben sich als wichtigste Plasmamerkmale:

- *freie Ionen und Elektronen*
- *gute elektrische Leitfähigkeit*
- *u. U. hohe Wärmeleitfähigkeit*
- *Kraftwirkung von Magnetfeldern*
- *Lichterzeugung, Photonenemission*

Wie aus der folgenden Übersicht und Abbildung 1.1 ersichtlich, findet man Plasmen über einen sehr weiten Parameterbereich in Temperatur und Dichte in Natur und Technik:

Astrophysik Sterninneres  
Sternatmosphäre  
Interstellares Plasma ..... insgesamt 99% aller Materie!

Geophysik Ionosphäre  
Polarlicht  
Blitz

Plasmatechnik Schaltertechnik  
Lichttechnik  
Plasmaantriebe  
Plasma-Prozesstechnik

Kernfusion

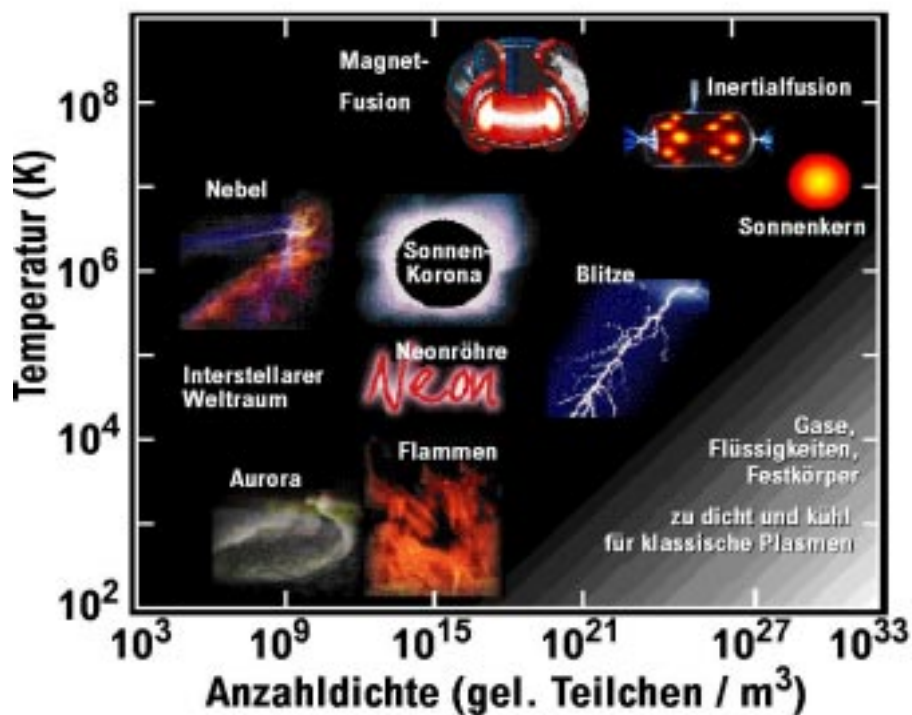


Abbildung 1.1: Überblick über den Parameterbereich in Dichte und Temperatur, in denen Plasmen zu finden sind.

Die ersten Untersuchungen heißer Plasmen wurden an astrophysikalischen Objekten vorgenommen. Insbesondere bei der Aufklärung der Physik der Sternatmosphären konnte durch Einsatz spektroskopischer Methoden ein erster Einblick in das Verhalten der Materie im Plasmazustand gewonnen werden.

Abbildung 1.2 zeigt einen Überblick über die Variation von Dichte  $n$  und Temperatur  $T$  in verschiedenen kosmischen Objekten. Da es sich hauptsächlich um Wasserstoffplasmen handelt, gilt hier in guter Näherung  $n_e = n_i = n$ . Man beachte die weite Variation, vor allem der Dichte (über 30 Größenordnungen).

- Zwischen den Himmelskörpern (*intergalaktischer, interstellarer und interplanetarer Raum*)

### astrophysikalische Plasmen

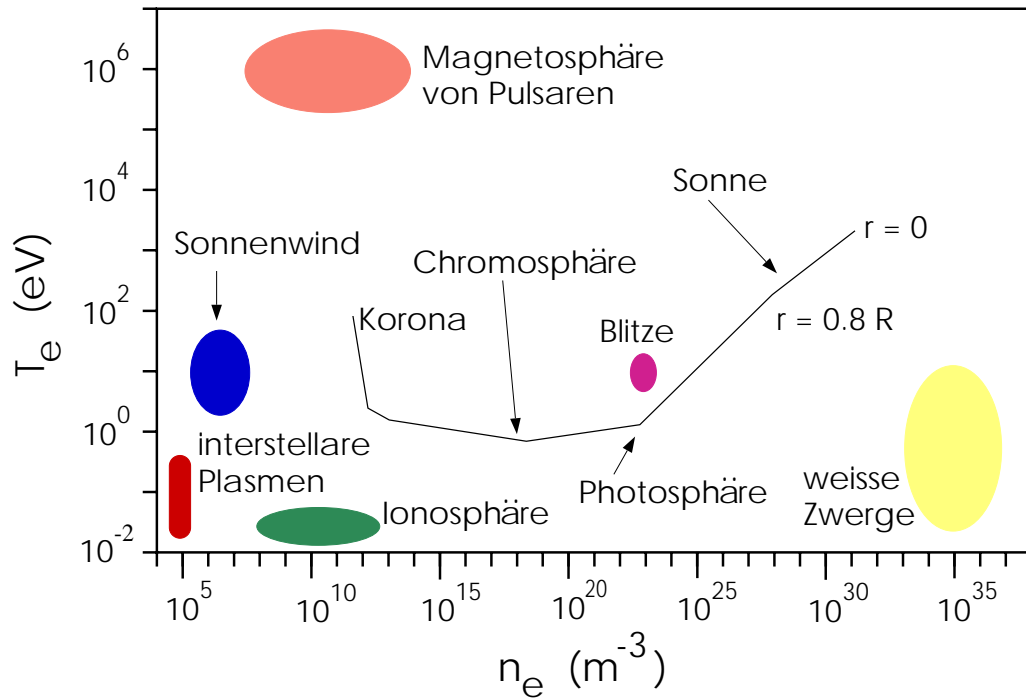


Abbildung 1.2: n-T Diagramm astrophysikalischer Plasmen,  $1\text{eV} \hat{=} 11700\text{K}$

variiert die Dichte über den großen Bereich von ca.  $0.1\text{-}10^{15} \text{ m}^{-3}$ . Die Temperatur dieser Plasmen variiert zwischen  $\approx 1\text{-}100 \text{ eV}$  ( $1 \text{ eV} \approx 11700 \text{ K}$ ). (Zum Vergleich: Vakuumapparaturen auf der Erde erreichen bei Raumtemperatur ( $T = 1/40 \text{ eV}$ ) z. B. Drücke von  $10^{-6} \text{ Pa}$  (Atmosphärendruck  $10^5 \text{ Pa}$ ), entsprechend Gasdichten von  $\approx n = 10^{14} \text{ m}^{-3}$ ; die Gasdichte der Erdatmosphäre liegt bei Raumtemperatur und Atmosphärendruck bei  $n \approx 2.5 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ .

- Gänzlich andere Verhältnisse ergeben sich für das *Innere der Sterne*. So treten z. B. im Inneren unserer Sonne ( $r = 0$  in Abbildung 1.2) Temperaturen bis zu  $1.5 \text{ keV}$  auf. Die Dichte ist mit  $10^{32} \text{ m}^{-3}$  ca. 1000 mal höher als im Festkörper, der Druck erreicht somit nach  $p = nkT$  den Wert von ca.  $2.5 \times 10^{16} \text{ Pa}$  (und liegt um 11 Größenordnungen über dem Atmosphärendruck!). Unter diesen extremen Bedingungen laufen Kernfusionsprozesse (Verschmelzung von Wasserstoff zu Helium) ab, aus denen die Fixsterne ihre Energie beziehen.
- Noch höhere Werte (bis zu  $10^{37} \text{ m}^{-3}$ ) nimmt die Dichte in den sogenannten *weißen Zwergen* an. Dies sind Sterne, die bereits ihren gesamten Wasserstoffvorrat verbrannt haben und zu kompakten Objekten kontrahiert sind. In ihrem Inneren findet sich ein Magnetfeld von bis zu  $1000 \text{ T}$ . Noch höhere Dichten ( $10^{42} \text{ m}^{-3}$ ) und Magnetfelder ( $10^8 \text{ T}$ ) erreichen die *Neutronensterne*, d. h. kollabierende Sterne oder weiße Zwerge. Hier liegt die Materie allerdings nicht mehr als Plasma vor, da nahezu alle Elektronen und Protonen zu Neutronen verschmolzen sind (inverser  $\beta$ -Zerfall).
- Ein astrophysikalisches Plasma hoher Temperatur ( $\approx 1 \text{ MeV}$ ) und niedriger Dichte ( $\approx 10^{10} \text{ m}^{-3}$ ) bildet sich an der Oberfläche eines Neutronensterns. Aufgrund des hohen Gravitationspotentials in der Umgebung des Neutronensterns fließt Materie aus der Umgebung (auch von evtl. benachbarten Sternen) zum Neutronenstern hin. Bei dieser materiellen Akkre-

tion bildet sich das erwähnte heiße Plasma in der Außenzone des Neutronensterns. Die geladenen Teilchen fließen entlang des Magnetfeldes des Neutronensterns und stürzen im Bereich der Pole mit nahezu Lichtgeschwindigkeit in das Innere. Dabei senden sie relativistische Zyklotronstrahlung (Synchrotronstrahlung) aus. Fällt die Rotationsachse des Neutronensterns nicht mit der Lage des magnetischen Dipolvektors zusammen, so kann der Beobachter eine pulsierende Lichtemission sehen (Leuchtfeuereffekt). Man spricht daher bei diesen Gebilden auch von *Pulsaren*. Aufgrund der schnellen Rotation der Neutronensterne kann die Pulsfrequenz im Bereich 0.1 bis einige Hz liegen. Da das Plasma an der Oberfläche des Pulsars im Wesentlichen vom Magnetfeld des Neutronensterns beeinflusst wird, spricht man hier von der *Magnetosphäre*.

In Abbildung 1.2 wird auch der weite Parameterbereich, der in der Sonne sowie ihrer Atmosphäre überstrichen wird, deutlich. Vom Sonneninneren fallen Dichte und Temperatur kontinuierlich bis zum Rand, an dem sich die Photosphäre befindet. Man hat es hier mit Temperaturen  $T \geq 1 \text{ eV}$  und Dichten  $n_e \leq 10^{23} \text{ m}^{-3}$  zu tun. Dies ist der Bereich, aus dem die für uns sichtbare Strahlung der Sonne kommt; bei  $T = 5700 \text{ K}$  hat das (kontinuierliche) Spektrum ein Maximum im grünen Bereich. Hier treten sehr starke Dichtegradienten auf, es schließt sich nach außen hin die Chromosphäre mit Temperaturen unter 4000 K an. Hier rekombiniert das Plasma zum Teil in  $H$  und  $H_2$ . Darauf steigt die Temperatur mit weiterer Entfernung vom Sonnenzentrum wieder an, um in der Sonnenkorona ein Maximum von ca. 200 eV anzunehmen. In diesem Gebiet spielt auch das Magnetfeld der Sonne eine Rolle, Phänomene wie Protuberanzen zeigen deutliche Beeinflussung des Koronaplasmas durch die Magnetfelder. Außerhalb von ca. 3 Sonnenradien ( $R_{\text{Sonne}} \approx 696000 \text{ km}$ ) geht das Koronaplasma kontinuierlich in den Sonnenwind, der als Teilchenstrom in das interplanetare Plasma gelangt, über.

Beim Auftreffen des Sonnenwindes auf die Atmosphäre der Erde wird energetische Teilchenstrahlung freigesetzt, welche die Erde als "Höhenstrahlung" erreicht. Geladene Teilchen wandern dabei im Erdmagnetfeld auf die Pole zu und erzeugen bei ihrem Auftreffen auf die Ionosphäre in etwa 100 km Höhe Leuchterscheinungen, die sogenannten *Nordlichter*. Die Ionosphäre selbst stellt ein dünnes Plasma dar, sie ist unter anderem für die Reflexion langwelliger Radiowellen von Bedeutung.

Weitere Plasmaerscheinungen in der Erdatmosphäre sind die Blitze; es handelt sich hierbei um Gasentladungen bei hohem Druck (Funkenentladung).

Auch aus Sicht der praktischen Anwendung kommt den Plasmen eine große Bedeutung zu: die Plasmatechnik (auch "**Plasmatechnologie**") ist eine größtenteils noch junge Technik mit z. Zt. erheblichen Wachstumsraten ( $> 10\%$ ). Mittlerweile kommt nahezu bei jedem modernen technischen Produkt ein Plasma bzw. ein Plasmaverfahrensschritt zum Einsatz. Weltweit werden z. Zt. bereits von Plasmaverfahren abhängige Produkte im Wert von über 500-600 Mrd. \$ erzeugt. Beispiele von **Plasmaanwendungen** sind:

Schaltertechnik	Nieder- und Hochspannungsschalter (Abschalter) Plasma-Einschalter
Moderne Lichttechnik	> 90% der Lichterzeugung Div. Plasmalampen; Leuchtstoffröhren ("Energiesparlampe"); "Gas"-Laser; Plasmadisplay
Wärme-/Fügetechnik	Plasmaschmelzöfen (bis 180 MW) für Edelstahl Plasmaschweißen, Plasmaspritzen (von Keramik) Umwelttechnik: Gift-/Abfallbeseitigung
Plasmachemie	Stoffwandlung (z. B. Ozon-, Azetylen-Erzeugung) "Nano-Pulver" (Keramik), "Nano-Kristalle"
Oberflächentechnik	Woll- und Textilbehandlung Kunststoffbehandlung (Haftung, Klebefähigkeit) Biomedizin (Sterilisation, biokompatible Schichten) <u>Hart-/Schutzschichten:</u> Korrosionsschutz, opt. Vergütungsschichten <u>Funktionsschichten:</u> Tribologische Schichten ("Trockenschmierung") Membranschichten (Trennprozesse) Speicherschichten, Photoschichten (z. B. a-Si:H) <u>Mikroelektronik:</u> Herstellung moderner CPU's und DRAM's <u>Mikromechanik, Sensorik:</u> Herstellung von Mikroteilen durch Plasmaätzen

Viele dieser Anwendungen sind noch in der Phase der Weiterentwicklung und im Detail noch nicht verstanden.

Die **Kernfusion** stellt eine der wenigen Optionen für eine zeitlich (nahezu) unbegrenzte künftige Energieversorgung dar. Der unlängst beschlossene Bau des ITER-Experiments in Cadarache (Frankreich) soll erstmals demonstrieren, dass mit der Kernfusion mehr Energie erzeugt werden kann als für die Plasmaheizung erforderlich ist. Eine Fusionsleistung 10 mal so groß wie die zugeführte Heizleistung ist geplant. Das ITER-Experiment soll im Jahr 2015 fertiggestellt sein.

## **Präzisierung des Plasma-Begriffs: Debye-Theorie**

Der Begriff der Ionisation ist nur die allereinfachste und nicht hinreichende Definition des Plasmazustands. Beispielsweise zeigt eine "geringe" Ansammlung von Ionen und Elektronen noch nicht die wesentlichen, noch zu besprechenden Plasmamerkmale (ähnlich wie etwa die Zusammenballung von wenigen Atomen zu einem Gesamtkörper ("Nanoteilchen") die deutlich andere, durch die Oberfläche (Quantenmechanik!) bestimmte Eigenschaften aufweist als der entsprechende Festkörper).

Zunächst sollte man vermuten, dass im Fall der geladenen Plasmateilchen mit ihren starken und langreichweitigen Kraftwechselwirkungen (Coulomb-Kräfte) für das Gesamtsystem "Plasma"

wieder ein Festkörper resultieren sollte. Dass sich ein Plasma aber als neuer (vierter) Aggregatzustand verhält, der sich eher ähnlich einem Gas und unter bestimmten Bedingungen auch wie eine Flüssigkeit (“Magneto-Hydrodynamik”) beschreiben lässt, ist erst von Debye und Hückel in den zwanziger Jahren richtig gedeutet worden, wofür dann der Name “Plasma” geprägt wurde (leider synonym mit dem biologischen Plasma).

Im Folgenden sollen die präziseren, physikalischen Definitionen des Plasmas (... ab wann verhält sich eine größere Ansammlung von Ionen und Elektronen als “Plasma”?)

Dazu ein Gedankenversuch:

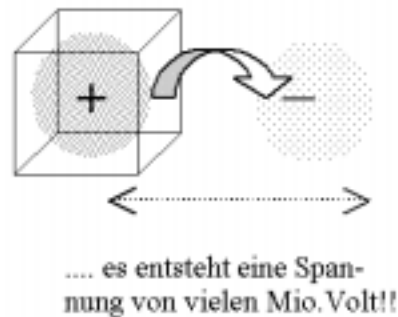


Abbildung 1.3: Ein Plasma versucht immer quasineutral zu bleiben. Eine makroskopische Verschiebung der Elektronen gegen die Ionen erzeugt hohe Spannungen.

Aus einem mit Elektronen und Ionen gefüllten Volumen werden alle Elektronen entfernt und um einen makroskopischen Betrag (z. B. 10 cm) verschoben. Dabei sei die Dichte von Ionen und Elektronen (z. B.) nur ein Millionstel der Atmosphärendichte. Mit Hilfe der Poisson-Gleichung lässt sich sofort berechnen (abschätzen), dass zwischen den verschobenen Elektronen und den zurückgebliebenen Ionen eine Spannung im Bereich von vielen Millionen Volt entstehen sollte. Es folgt: Über makroskopische Dimensionen (typ.  $> \text{mm} \dots \text{cm}$ ) ist die Trennung der beiden Ladungssorten nicht möglich....oder anders: ein Plasma versucht immer “**quasineutral**” zu bleiben!

Mit extrem geringer Abweichung gilt:

$$n_i - n_e \approx 0$$

Anmerkung: wenn es sich um ein Plasma mit mehrfach (Z-fach) geladenen Ionen handelt, gilt natürlich:  $Z \cdot n_i = n_e$ .

Soweit die **Makroskala**. Anders ist es auf der **Mikroskala**: Hier halten sich logischerweise die (leichten) Elektronen “viel lieber” in der Nähe ihres Gegenparts, des Ions auf. Um Makro und Mikro genauer zu quantifizieren, machen wir einen weiteren Gedankenversuch: Wir bringen ein “Extra-Ion” in das quasineutrale Plasma ein (was die Gesamtsituation (Poisson-Gleichung!) natürlich nicht ändert). In der Nähe dieser Extraladung sollte sich nun aber doch eine - im Zeitmittel - etwas höhere Elektronendichte einstellen (siehe Abbildung 1.4), was wir offensichtlich analog zur barometrischen Höhenformel  $p = p_0 \cdot \exp(-\rho gh/kT)$  beschreiben können.



Dementsprechend gilt:

$$n_e(r) = n_{e0} \cdot e^{|E_{pot}/E_{kin}|} = n_{e0} \cdot e^{\frac{e \cdot U(r)}{kT_e}}$$

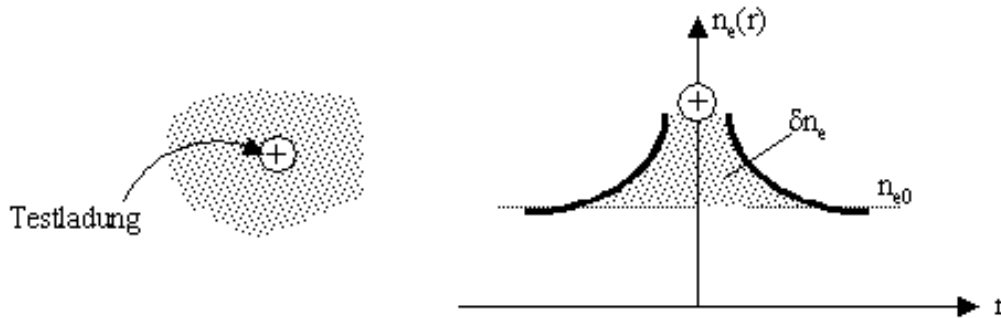


Abbildung 1.4: In der Nähe einer positiven Testladung ist die Elektronendichte erhöht. Die positive Ladung wird "abgeschirmt".

Bei einem mittleren Abstand der Teilchen von  $\langle r \rangle = (n_{e0})^{-1/3}$  stellt sich die potentielle (elektrostatische) Energie  $|e \cdot U(\langle r \rangle)|$  als sehr klein gegenüber der mittleren kinetischen Energie  $k_B T_e$  heraus (= **ideales Plasma**), sodass wir die e-Funktion entwickeln können. Die Annahme, dass die kinetische Energie der Plasmateilchen sehr viel größer sei als die potentielle Energie aufgrund der Coulomb-Wechselwirkung ( $E_{kin} \gg E_{pot}$ ), ist dabei die Voraussetzung für das Vorliegen eines "idealen Plasmazustands". Logischerweise kann diese Bedingung auch verletzt sein und es liegt ein **nicht-ideales Plasma** vor mit  $E_{kin} \leq E_{pot}$ . Die Bedingungen dafür sind: sehr hohe Plasmadichte bei kleiner Temperatur (typ.  $n_e > 10^{26} \text{ m}^{-3}$  und  $T_e \approx T_i \approx \text{eV}$ -Bereich). Die Entwicklung der e-Funktion ist dann nicht mehr möglich, die Behandlung dieses manchmal auch wichtigen Falles (z. B. Planeten-Inneres, hochdichte Bogenentladungen) ist ungleich schwieriger.

Für ideale Plasmen gilt also:

$$n_e(r) \approx n_{e0} \cdot (1 + e \cdot U/kT_e)$$

Dies in die Poissongleichung (in sphärischen Koordinaten) eingesetzt, ergibt:

$$\text{div}(-\text{grad}U) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \cdot \frac{dU}{dr} \right) = \frac{e}{\epsilon_0} \cdot (n_e(r) - n_{e0})$$

(Die Ionendichte  $n_i$  ist jetzt durch die mittlere Elektronendichte ersetzt (d. h.  $n_i = n_{e0}$ ))

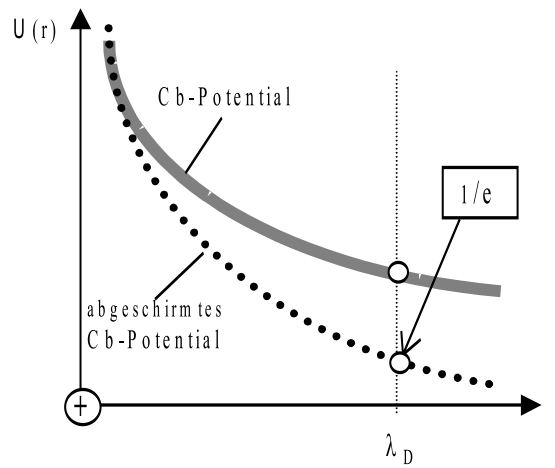


Abbildung 1.5: Wegen der Abschirmung von Ladungen finden wir im Plasma nicht ein Coulomb-Potential, sondern das sogenannte Debye-Potential, das kurzreichweitiger ist.

Als Lösung folgt unmittelbar:

$$U(r) = \underbrace{\frac{e}{4\pi\epsilon_0}}_{\text{Cb-Potential}} \cdot \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{Abschirmfaktor}} \cdot \underbrace{\left(e^{-\frac{r}{\lambda_D}}\right)}_{\text{Abschirmfaktor}}$$

mit:

$$\lambda_D = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_0}{e^2} \cdot \frac{kT_e}{n_e}\right)}$$

Wir erhalten als Ergebnis das normale Coulomb-Potential multipliziert mit einem exponentiellen Schwächungsfaktor. Das Potential ist grafisch dargestellt in Abbildung 1.5.

Die im Exponenten auftretende Skalierungslänge ist die sogenannte **Debye-** oder **Abschirmlänge** des Plasmas, die genau zwischen Makro- ( $\gg \lambda_D$ ) und Mikroskala ( $\leq \lambda_D$ ) unterscheidet. Insbesondere stellen wir fest, dass diese Länge parameterabhängig ist (= f (Temperatur, Dichte)). Es ist sofort ersichtlich, dass die Temperatur im Zähler von  $\lambda_D$  bzw. Nenner des Exponenten der e-Funktion stehen muss (höher energetische Elektronen schaffen es weiter von der Testladung weg). Umgekehrt die Dichte: je dichter die Elektronen, desto schneller ist das Cb-Potential abgeschirmt!

Diese Betrachtung gilt natürlich nicht nur für das gedachte, eingebrachte “Extra-Ion”, sondern für alle Plasmaionen (die davon ja nicht unterscheidbar sind). Aus einem Volumenelement von Debye-Dimensionen lässt sich nun sehr wohl eine Ladungssorte (z. B. die Elektronen) völlig entfernen. In diesem Fall gilt:

$$\Delta U \approx \frac{U}{\lambda_D^2} = \rho_+ - \rho_- = \frac{e}{\epsilon_0} n_e$$

.... Elektronen werden entfernt!

Die Debye-Länge eingesetzt liefert:

$$U \approx kT_e/e$$

Wird also eine Ladungsorte (Elektronen) aus dem (kleinen) Debye-Volumen entfernt, so resultiert eine potentielle Energie, die gleich der kinetischen Energie (Temperatur) der Elektronen ist (... und nicht “viele Millionen e-Volt”)!

Neben der Debye-Länge ist die **Anzahl der Teilchen** (Elektronen) im Debye-Volumen eine weitere, wichtige Kenngröße für ein Plasma. Man erhält diesen Wert durch Multiplikation des Volumens mit der Dichte:

$$N_e = n_e \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \lambda_D^3 = \left(\frac{\epsilon_0}{e^2}\right)^{3/2} \cdot \frac{kT_e^{3/2}}{\sqrt{n_e}}$$

Typische Werte sind:

	$\lambda_D$	$N_D$
Fusionsplasma (10 keV, $10^{20} m^{-3}$ )	75 $\mu$	$2 \cdot 10^8$
Technisches Plasma (5 eV, $10^{17} m^{-3}$ )	50 $\mu$	$6 \cdot 10^4$
Astrophys. Plasma (1 eV, $10 m^{-3}$ )	75 km	$5 \cdot 10^{11}$
Dichtes Bogenplasma (1.5 eV, $10^{24} m^{-3}$ )	0,01 $\mu$	3 = Grenze zum nicht-idealen Plasma

Wie die Tabelle zeigt, ist die Anzahl der Teilchen im Debye-Volumen in üblichen (“idealen”) Plasmen **überraschend groß**, während Debye-Länge bzw. -Volumen selbst in Laborplasmen sehr kleine Werte annehmen. In astrophysikalischen Plasmen ergeben sich demgegenüber Debye-Längen von vielen km (d. h. nur über entsprechend noch viel größere Dimensionen verhält sich das Teilchenensemble erst als “Plasma”). Bei extrem dichten Plasmen wiederum wird die Debye-Länge sehr klein und mit  $N_D < 1$  verliert die Debye-Theorie schließlich ihre Gültigkeit.

Zusammengefasst lässt sich der Plasmabegriff wie folgt präzisieren:

$$\begin{aligned} n_e = n_i &= \text{strenge Quasineutralität} \\ L \gg \lambda_D &= \text{Systemgröße groß gegen Debye-Länge} \\ N_{tot} \gg N_D &= \text{hinreichend viele Teilchen im System} \end{aligned}$$

Alle drei Formulierungen stehen äquivalent dafür, dass der “Plasmazustand” gegeben ist.

Bei Nichterfüllung dieser Bedingungen haben wir es mit einem “nicht-neutralen” Plasma zu tun. (Von manchen Autoren auch als “nicht mehr Plasma” bezeichnet). Ein äußerst wichtiges Beispiel (weil praktisch für alle Labor- und technischen Plasmen gegeben!) für eine solche Verletzung der Quasineutralität ist offensichtlich der **Plasma-Festkörper-Übergang** (siehe auch

**Plasma-Randschicht**, Kapitel 5). Über Dimensionen einer Debye-Länge (typ. 1/10 mm) bildet sich eine nicht-neutrale Randzone aus, in der ein starker Potentialsprung auftritt: das Plasma lädt sich positiv auf und hält so die schnellen Elektronen zurück.

Zur Übersicht bzw. Vervollständigung des Plasmabegriffs sind nachfolgend alle wichtigen Plasmazustände und Plasmaformen tabellarisch zusammengestellt. Hier unterscheidet man zunächst zwischen den Formen (Grenzen siehe Abbildung 1.6):

- **ideales Plasma**

Wechselwirkung zwischen den Teilchen kann gegenüber ihrer kinetischen Energie vernachlässigt werden

$$\frac{3}{2}k_B T \gg \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} n^{1/3} \rightarrow T[\text{eV}] \gg 10^{-9} (n[\text{m}^{-3}])^{1/3}$$

- **nicht-ideales Plasma**

weniger als 1 Teilchen im Debye-Volumen bzw. potentielle Energie  $\geq$  kin. Energie, Debye-Theorie versagt.

- **entartetes Plasma** (quantenmechanische Beschreibung!)

extrem hohe Dichten (Sterninneres, lasererzeugte Plasmen). Mittlerer Teilchenabstand wird kleiner als die deBroglie-Wellenlänge (= "Teilchengröße") bzw. kinetische Energie kleiner als die Fermi-Energie

$$\left(E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} n^{2/3}\right) \rightarrow T[\text{eV}] < 2,4 \cdot 10^{-19} (n[\text{m}^{-3}])^{2/3}$$

- **relativistisches Plasma**

kinetische Energie bzw. Temperatur der Elektronen nimmt relativistische Werte an

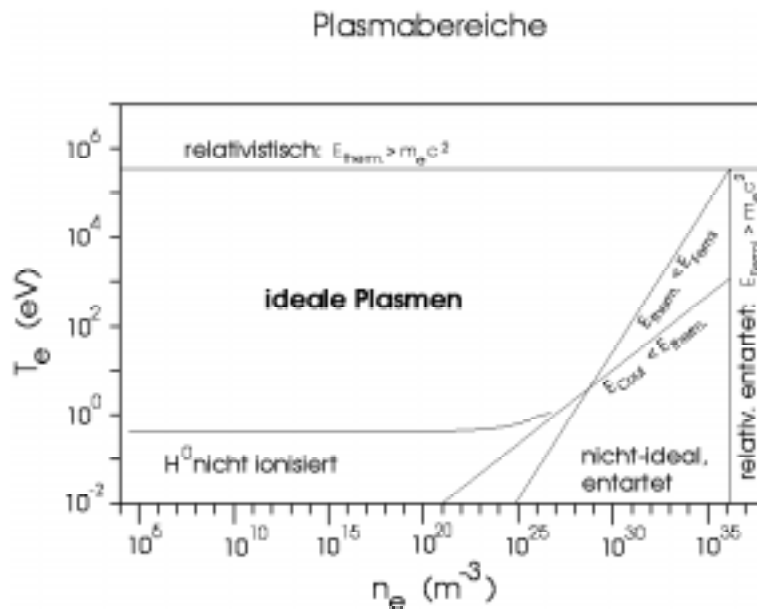


Abbildung 1.6: Zustandsgrenzen von Plasmen.

Darüber hinaus gibt es noch weitere wichtige Unterscheidungsmerkmale:

- **“thermisches” Plasma**  
alle Teilchen sind im thermischen Gleichgewicht und damit sind alle Temperaturen (Elektronen, Ionen, Neutrale) gleich.
- **“nicht-thermisches” Plasma**  
eine Teilchensorte (i. A. die Elektronen) hat eine viel höhere Temperatur als die anderen Teilchen (i. A. Ionen, Neutrale).
- **“magnetisiertes” Plasma**  
... liegt vor, wenn ein Magnetfeld überlagert wird und die Zahl der Teilchenstöße (pro Zeiteinheit) beschränkt (d. h.  $<$  Zyklotronfrequenz) bleibt. “Magnetisiert” (... oder nicht) ist also für Ionen und Elektronen getrennt zu betrachten!

Die nachfolgende Tabelle fasst alle diese Unterscheidungsmerkmale und die zugehörigen Bedingungen noch einmal zusammen:

	Merkmale	Typ. Bedingungen
Ideales Plasma	$n_e = n_i$ $L \gg \lambda_{Debye}$ $N \gg N_{Debye} \gg 1$	sehr weiter Parameterbereich
Nicht-ideales Plasma	$N_{Debye} < 1$ $n^{-1/3} < \lambda_{Debye}$	hohe Dichte, geringe Temperatur
Thermisches Plasma	$T_e = T_i (= T_0)$	viele Stöße auf der Einschusszeitskala (hohe Dichte, kleine Temp.)
Nicht-thermisches Plasma	$T_e \gg T_i (\sim T_0)$	wenig Stöße, je nach $T_e$ geringe bis sehr geringe Dichte
Entartetes Plasma	$n^{-1/3} < \lambda_{deBroglie}$	extrem hohe Dichte (Sterninneres)
Relativistisches Plasma	$T_e$ (bzw. $\langle E_e \rangle$ ) $> m_e c^2$	sehr heiße Elektronen ( $> 500$ keV)
Magnetisiertes Plasma	$\omega_c / \nu_{Sto\beta} \gg 1$	viele Gyrationen bevor Stoß erfolgt
Nicht-magnetisiertes Plasma	$\omega_c / \nu_{Sto\beta} < 1$	keine Gyration ohne Stoß

## Plasmafrequenz

Die Plasmafrequenz ist eine weitere, elementare Kenngröße zur Plasmabeschreibung. Sie charakterisiert eine mögliche Eigenschwingung des Plasmas und gibt zugleich den unteren Grenzwert, bis zu dem elektromagnetische Wellen noch in ein (magnetfeldfreies) Plasma eindringen können (“*Plasma-cut-off*”). (Genauerer findet sich im Kapitel 11). Zur Herleitung gehen wir von einem Plasma aus, in dem eine Ladungssorte (z. B. Elektronen) gegenüber der anderen (Ionen) um einen winzigen Betrag  $\delta l$  verschoben gedacht wird:

Die Verschiebung erzeugt sofort ein Raumladungsfeld, d. h. eine Rückstellkraft, und es folgt eine Umkehrbewegung der Elektronen entsprechend der Bewegungsgleichung:

$$m_e \cdot \frac{d^2(\delta l)}{dt^2} = -e \cdot E_{Raumldg}$$

$$= -\frac{e^2 \cdot n_e}{\varepsilon_0} \cdot \delta l$$

Die Lösung dieser Gleichung (einfacher Exponentialansatz!) liefert offensichtlich eine Schwingung um die Gleichgewichtslage mit der (Kreis-)Frequenz  $\omega$ :

$$\frac{d^2(\delta l)}{dt^2} = \omega^2 \cdot \delta l$$

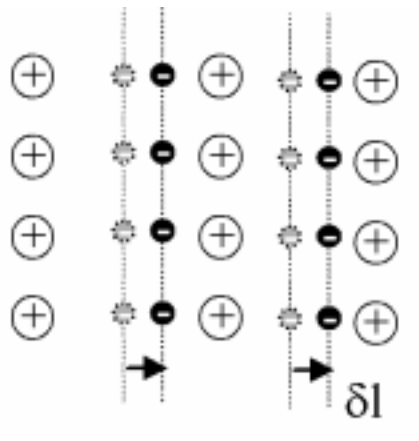
Dies ist die **Plasmafrequenz** (eigentlich Elektronen-Plasmafrequenz):

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 \cdot n_e}{\varepsilon_0 \cdot m_e}}$$

Es gilt also:

$$f_{pe} \propto \sqrt{n_e}$$

Abbildung 1.7: Verschiebung der Elektronen gegen die Ionen zur Herleitung der Plasmafrequenz.



Setzt man Zahlenwerte ein, so findet man:

$$f_{pe} = 2,8 \text{ GHz für } n_e = 1 \cdot 10^{17} [m^{-3}] \text{ typ. Niederdruckplasma}$$

$$f_{pe} = 88 \text{ GHz für } n_e = 1 \cdot 10^{20} [m^{-3}] \text{ typ. Fusionsplasma}$$

(d. h. Vakuumwellenlängen  $\lambda_0 = 11 \text{ cm}$  bzw.  $= 3,4 \text{ mm}$ )

Hier sei bereits vorweggenommen, dass elektromagnetische Wellen mit geringerer Frequenz als die Plasmafrequenz nicht ohne Weiteres in ein "normales", gut leitfähiges<sup>1</sup> Plasma eindringen können sondern reflektiert werden (**Plasma-cut-off**).

<sup>1</sup>Dies ändert sich, wenn das Plasma schlecht leitfähig ist (d. h. viele Stöße der Elektronen, Reibung). In diesem Fall dringt ein u. U. größerer Teil der HF-Leistung als gedämpfte Welle in das Plasma ein (vgl. analog: Optik!).

(Der durch die Ionosphäre gebildete “Plasmaspiegel” bewirkt übrigens, dass man mit Kurzwellen rund um die Erde funken kann! Genauso ist auch die Reflektion an Metalloberflächen ein “Plasmaeffekt”. Wegen der hohen Elektronendichte in Metallen liegt dort die cut-off-Frequenz aber bereits im Röntgenbereich).

Eine entsprechende Plasmafrequenz lässt sich auch für die Ionen definieren. Diese ist wegen der Masse im Nenner um  $(m_e/m_i)$  geringer. Die Ionenplasmafrequenz  $\omega_{pi}$  spielt u. a. eine Rolle bei HF-Plasmen.

Zwischen Debye-Länge und Plasmafrequenz lässt sich eine Verknüpfung herstellen, wie man durch Einsetzen sofort feststellen kann. Man findet (bis auf Faktor  $\pi$ ):

$$(2\lambda_D) \cong \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}} \cdot \frac{1}{f_{pe}} = v_{therm} \cdot \tau_{pe}$$

Auf der Zeitskala der (inversen) Plasmafrequenz  $(1/f_{pe})$  durchläuft das Elektron mit seiner thermischen Geschwindigkeit gerade eine Strecke von Debye-Dimension.

Zusammenfassung: Plasmaeigenschaften, Plasmadefinitionen

“Plasma” gilt als “4. Aggregatzustand” der Materie. Materie ist jetzt ionisiert. Bedingung dafür ist eine genügend hohe Temperatur (einige 10.000 bis Mio. K). Geladene Teilchen (Ionen, Elektronen) haben starke Coulomb-Wechselwirkungen untereinander. Bei genauerer Betrachtung findet man jedoch ( $\rightarrow$  Plasmabegriff): Über Distanzen größer als **Debye-Länge** erfolgt Selbstabschirmung durch Ansammlung der entgegengesetzten Ladungssorte (Formel:  $\lambda_D \propto (T/n)^{1/2}$ ). Folgerung: Ladungsansammlung stellt nur dann “**Plasma**” dar, wenn  $L \gg \lambda_D$ . Viele Teilchen von je einer Ladungssorte (z. B. viele Elektronen) können in diesem Fall nicht mehr ohne Weiteres entfernt werden, d. h. “Plasma” verhält sich “**quasineutral**” ( $n_e = n_i$ ).

- “**Ideales Plasma**” (= übliche Parameter) unter 2 (äquivalenten) Bedingungen: (1) große Teilchenzahl in der Debye-Kugel  $N_D \approx n \cdot \lambda_D^3 \gg 1$  und: (2)  $kT \gg eU$

anderenfalls:

- “**Nicht-ideales Plasma**” (= extrem hohe Dichte und/oder sehr kleine Temperatur, sodass  $N_D \leq 1$  bzw.  $kT \leq eU$ ). (Debye-Theorie nicht mehr gültig!)

Ionen und Elektronen können (als Gesamtheit) nicht über große Entfernungen relativ zueinander verschoben werden, wohl aber über die geringe Distanz der Debye-Länge  $\lambda_D$ . Die entsprechende Rückstellkraft führt auf eine charakteristische Plasmaeigenschwingung mit der **Plasmafrequenz**  $\omega_p$  (Formel:  $\omega_{pe} \propto \sqrt{n_e}$ ). Nur oberhalb der Plasmafrequenz können elektromagnetische Wellen in ein Plasma eindringen, darunter nicht! (= “**Plasma-cut-off**”) (Ganz analog bei Metallen, hier liegt  $f_{pe}$  im Röntgenbereich!)





# Kapitel 2

## Stöße im Plasma

Die im Plasma vorhandenen Teilchensorten (Ionen, Elektronen und auch Neutrale) wechselwirken miteinander über **Stöße**. Da derartige Wechselwirkungen sich entscheidend auf die vielfältigen physikalischen Eigenschaften des Plasmas auswirken, sollen Teilchenstöße im Folgenden näher untersucht werden.

### Allgemeine Definitionen zum “Teilchenstoß”

Die Wechselwirkung (Stoß) eines Teilchens der Sorte 1 mit einem anderen der Sorte 2 wird durch Definition eines zugehörigen **Stoßquerschnitts** beschrieben. Dieser Querschnitt stellt dann die Wechselwirkungsfläche dar, die das gestoßene Teilchen (2) dem ankommenden Teilchen (1) entgegengesetzt. Zur besseren Behandlung wird dann definitionsgemäß die stoßende Teilchensorte (= **Testteilchen**) als punktförmig angesetzt und der sich damit ergebende Stoßquerschnitt voll der gestoßenen Teilchensorte 2 (= **Feldteilchen**) zugeordnet. Jetzt wird die **Stoßfrequenz** eingeführt, mit der die zwei Teilchensorten miteinander wechselwirken. Diese Stoßfrequenz ist dann offensichtlich:

$$\nu_{12} = n_2 \cdot \langle \sigma_{12} \nu_1 \rangle$$

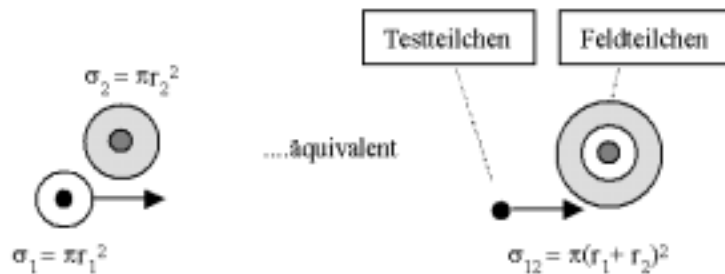


Abbildung 2.1: Äquivalenz für den Stoßquerschnitt für Stöße zwischen zwei ausgedehnten Teilchen oder einem punktförmigen Testteilchen und einem “vergrößerten” Feldteilchen

Dabei ist in der Formel berücksichtigt, dass der Stoßquerschnitt  $\sigma_{12}$  (in aller Regel) von der (Relativ)-Geschwindigkeit  $v_1$  der stoßenden Teilchensorte zur gestoßenen Sorte abhängt. Um die mittlere Stoßfrequenz zu erhalten, ist also über alle Geschwindigkeiten zu mitteln. Dies ist durch die spitze Klammer angedeutet, die eine Mittelung über alle vorkommenden Teilchengeschwindigkeiten angeben soll. Neben der Stoßfrequenz sind weitere interessierende Größen:

**Stoßzeit**  $\tau_{12} = 1/\nu_{12}$

**freie Weglänge**  $\lambda_{12} = v_1 \cdot \tau_{12}$  jeweils für den Stoß 1  $\Rightarrow$  2.

Man unterscheidet weiterhin zwischen **elastischen** und **unelastischen** Stößen, wobei gilt:

- **Elastischer Stoß:** es wird nur kinetische Energie ausgetauscht
- **Inelastischer Stoß:** es wird (wesentlich) potentielle Energie übertragen (Beispiele: Anregung, Ionisation, Dissoziation)

Die wichtigsten Stöße in einem Plasma sind:

### Coulomb-Stöße $e, i \Leftrightarrow e, i$

Der Stoß wird beschrieben durch die *Rutherford'sche* Streuformel; Beispiel: Elektron trifft auf Ion der Ladung  $Z \cdot e$  (siehe Abb. 2.1).

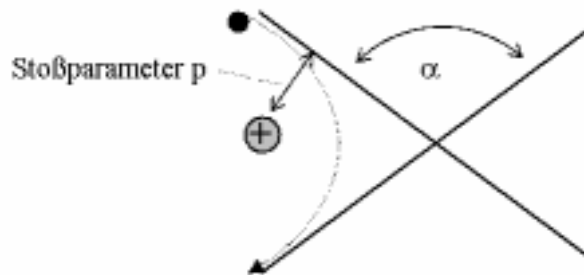


Abbildung 2.2: Skizze zur Definition von Stoßparameter  $p$  und Ablenkwinkel  $\alpha$

Für den Ablenkwinkel gilt (für die Näherung  $m_e \ll m_i$ )<sup>1</sup>:

$$\tan(\alpha/2) = \frac{W_{pot}}{2W_{kin}} = \frac{e \cdot Z \cdot e}{(4\pi\epsilon_0) \cdot m_e v^2 \cdot p}$$

Nimmt man den 90°-Stoß als relevanten Stoß an, so folgt ( $\tan \alpha/2 = 1$ ):

$$\sigma_{90} = \pi \cdot p_{90}^2 = \frac{\pi \cdot Z^2 \cdot e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \cdot 4 \cdot (W_{kin})^2}$$

Demnach ist also der Coulomb-Stoßquerschnitt stark von der Teilchenenergie abhängig, nämlich  $\propto 1/W_{kin}^2$ .

Bei genauerer Betrachtung zeigt sich aber, dass dieser unmittelbare 90°-Stoß (*“starker Stoß”*) keineswegs den Querschnitt für die 90°-Ablenkung von geladenen Teilchen richtig wiedergibt! Viel effizienter ist vielmehr die Summe aller *Kleinwinkelstöße*, d. h. Stöße aus größerer Distanz, die - wie in Abbildung 2.3 dargestellt - zufällig gleichfalls eine 90°-Umlenkung bewirken. Bei

<sup>1</sup>Exakt ist die reduzierte Masse einzusetzen:  $1/M=1/m_e+1/m_i$  (Schwerpunktsystem!)

der Wahrscheinlichkeitsauswertung sind alle Stoßabstände von  $p_{90}$  (= direkter  $90^\circ$ -Stoß, wie zuvor diskutiert) bis zur Debye-Länge (= Ende der Wechselwirkung<sup>2</sup>) zu berücksichtigen.

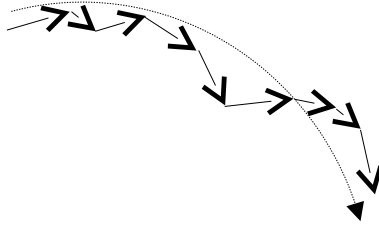


Abbildung 2.3: Viele Kleinwinkelstöße tragen zur Ablenkung der Teilchen viel effektiver bei als "echte"  $90^\circ$ -Stöße.

Man findet (nach etwas komplizierter Rechnung):

$$\frac{\sigma_{90\text{-effektiv}}}{\sigma_{90\text{-direkt}}} = 8 \cdot \ln \frac{\lambda_D}{p_{90}} = 8 \cdot \ln \Lambda \geq 100$$

das heißt, um diesen großen Faktor (x 100!!) ist der direkte  $90^\circ$ -Stoß zu korrigieren, um den **effektiven  $90^\circ$ -Stoß** zu erhalten. Dabei ist  $\ln \Lambda$  der sogenannte Coulomb-Logarithmus<sup>3</sup>. Er hat den typischen Wert 15. ( $\ln \Lambda \sim 10$  im Niedertemperatur-Plasma und  $\ln \Lambda \sim 17$  im Fusionsplasma mit 10 keV).

Mit  $W_{kin} = 3/2 k T_e$  und  $v = (3 \cdot k T_e / m_e)^{1/2}$  (entspricht der Annahme, dass die Geschwindigkeit des stoßenden Teilchens gerade gleich der thermischen Geschwindigkeit ist) folgt für die Elektronen-Stoßzeit (effektive  $90^\circ$ -Umlenkung) mit  $Z$ -fach geladenen Ionen:

$$e \rightarrow i: \quad \tau_{ei} = \frac{K}{\ln \Lambda} \cdot \frac{(k_B T)^{3/2}}{Z^2 n_i} = \frac{K}{\ln \Lambda} \cdot \frac{T_e^{3/2}}{Z \cdot n_e}$$

( $T_e$  in eV,  $n_e$  in  $m^{-3}$ )

mit:

$$K = \frac{(\sqrt{3} \cdot 6\pi) \cdot \varepsilon_0^2 \cdot \sqrt{m_e} \cdot e^{3/2}}{e^4} \approx 0,345 \cdot 10^6$$

Anzumerken ist weiter: Im Nenner der Formel stünde eigentlich  $Z^2 \cdot n_i$ ; für die Ionendichte wurde aber  $n_e/Z$  eingesetzt (also statt auf die Feldteilchen (Ionen) auf die praktikablere Elektronendichte bezogen!) Außerdem wurde die Näherung  $\nu_{ei} = 1/\tau_{ei} = n_i \langle \sigma_{ei} v_e \rangle \approx n_i \sigma_{ei} \langle v_e \rangle$  verwendet.

Analog folgt der Stoß zwischen Elektronen untereinander - hier ist wegen  $m_1 = m_2$  die reduzierte Masse bzw. das Schwerpunktsystem zu verwenden:

$$e \rightarrow e: \quad \tau_{ee} = \tau_{ei}$$

<sup>2</sup>Ohne Abschneiden würde sich ein unendlich großer Streuquerschnitt ergeben. Eigentlich wäre ein abgeschirmtes Potential statt des Coulomb-Potentials einzusetzen.

<sup>3</sup>Der "Coulomb-Logarithmus" ergibt sich zu:  $\ln \Lambda = 29,9 - 1/2 \ln n_e (10^{20} m^{-3}) + 3/2 \ln T_e (eV)$

Für die Ionen-Stoßzeiten (hier gleiche Ionen, d. h.  $Z$  und  $m_i$  gleich) folgt entsprechend:

$$i \rightarrow i: \quad \tau_{ii} = \frac{K \sqrt{m_i/m_e}}{\ln \Lambda} \cdot \frac{(k_B T_i)^{3/2}}{Z^3 \cdot n_e}$$

(Hier wurde im Nenner für  $Z^4 n_i \rightarrow Z^3 n_e$  gesetzt, d. h. die Formel wiederum auf die Elektronendichte bezogen)

$$i \rightarrow e: \quad \tau_{ie} = \frac{K \cdot m_i / \sqrt{m_e}}{2 \cdot \ln \Lambda} \cdot \frac{(k_B T_e)^{3/2}}{Z \cdot n_e}$$

Gemäß den Formeln stehen die einzelnen Stoßzeiten in folgendem Verhältnis zueinander (für jeweils gleiche Temperatur und Elektronendichte):

$\tau_{ee}$	$\tau_{ei}$	$\tau_{ii}$	$\tau_{ie}$
1	$\frac{1}{Z}$	$\frac{1}{Z^3} \cdot \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$	$\frac{1}{Z^2} \cdot \frac{m_i}{m_e}$

Anmerkung: Die obigen Formeln der Stoßzeiten sind im Vorfaktor noch etwas zu korrigieren! Nach der genauen Theorie (= kinetische Behandlung) ist anstelle des Vorfaktors  $3^{1/2} \cdot 6\pi$  der Wert 45,7 zu setzen (vgl. L. Spitzer).

Die Asymmetrie zwischen  $\tau_{ei}$  und  $\tau_{ie}$  ist darin begründet, dass wir hier die Ablenkung durch den Stoß betrachten. Wegen der Impulserhaltung ist die Änderung der Geschwindigkeit eines Ions durch Stoß mit einem Elektron um das Massenverhältnis kleiner als im umgekehrten Fall für das Elektron. Die Stoßzeiten geben zugleich auch die **Energieaustauschzeiten** wieder (e-e usw.). Für e-i-Stöße verschwindet allerdings die oben diskutierte Asymmetrie, da die Energieerhaltung natürlich erfüllt sein muss.

Anstelle der Stoßzeiten kann man die Häufigkeit der Stöße auch im Konzept der *freien Weglänge*  $\lambda$  deuten: Bei einer mittleren Geschwindigkeit von  $\nu_{th}$  legt ein Teilchen im Mittel zwischen zwei Stößen die Strecke

$$\lambda = \nu_{th} \tau$$

zurück. Wir hatten bereits bemerkt, dass für Elektronen die Zeiten  $\tau_{ee}$  und  $\tau_{ei}$  von gleicher Größenordnung sind. Für Ionen ist wegen  $\tau_{ii} \gg \tau_{ie}$  vor allem der Stoß untereinander von Bedeutung. Wir erhalten so

$$\lambda_e \approx \nu_{th,e} \tau_{ee} = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \nu_{th,i} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \tau_{ii} = \lambda_i,$$

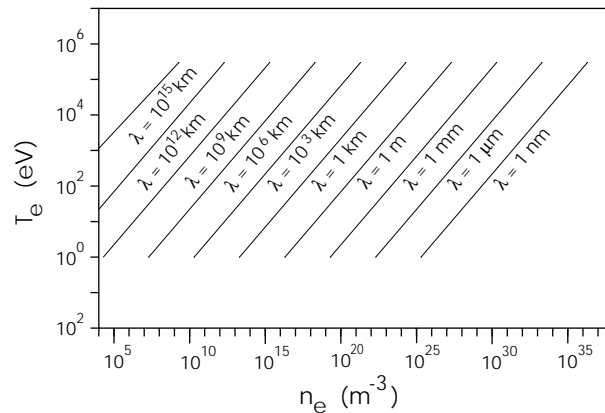
d. h. die freie Weglänge der Ionen und Elektronen ist im thermischen Plasma mit  $T_e = T_i$  näherungsweise gleich. Für die mittlere freie Weglänge findet man aus obigen Formeln:

$$\lambda[m] \approx 2 \times 10^{16} \frac{(T[eV])^2}{n[m^{-3}]}$$

Abbildung 2.4 zeigt typische Größenordnungen der freien Weglänge.

Wie man sieht, kann  $\lambda$  sehr große Werte annehmen. So ergibt sich z. B. für ein Fusionsplasma mit  $T = 10 \text{ keV}$  und  $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$  eine freie Weglänge von  $\lambda \approx 20 \text{ km}$ ! In einem typischen magnetischen Fusionsexperiment, in dem Teilchen durch Magnetfeldlinien in einem Torus vom Umfang  $\approx 10 \text{ m}$  gefangen sind, vollführt ein Teilchen daher im Mittel 2000 Umläufe, bevor es um  $90^\circ$  gestreut wird. Dies führt zur außerordentlich hohen Leitfähigkeit für Wärme wie auch elektrischen Strom längs der Feldlinien.

Abbildung 2.4: Freie Weglänge im thermischen Plasma im n-T Diagramm



### Stöße mit Neutralteilchen: $e \Rightarrow n_0$

In Niederdruckplasmen spielen Coulomb-Stöße für die freie Weglänge meist eine untergeordnete Rolle, hier sind (bei  $n_e \ll n_0$ ) die Stöße mit den Neutralen wesentlich.

Im Einzelnen gilt:

#### a) Elastische Stöße: Elektronen $\Rightarrow$ Neutrale

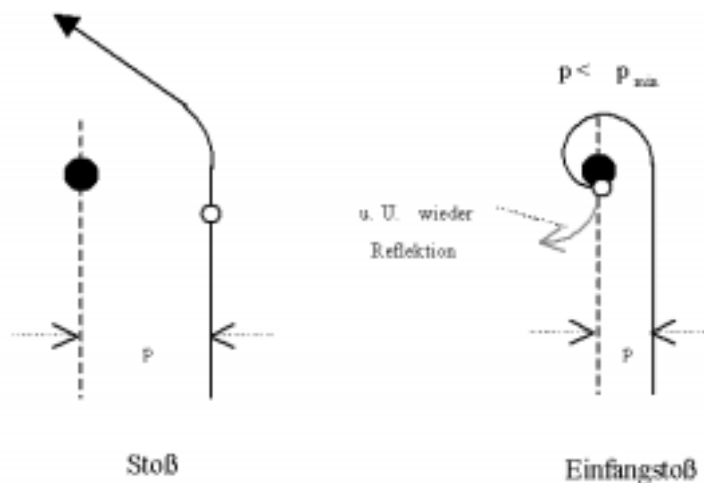
Das Stoßverhalten (Querschnitt, Stoßfrequenz) wird - wie bei den Coulomb-Stößen - durch den Potentialverlauf  $U(r)$  bestimmt, den das anlaufende Teilchen sieht. Nachfolgend sind das Potential  $U$  und der resultierende Stoßquerschnitt  $\sigma$  bzw. die Stoßfrequenz  $\nu$  in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit  $v$  des Testteilchens für verschiedene Stoßarten zusammengestellt (zum Vergleich sind Coulomb-Stoß und "harte Kugel" mit aufgeführt):

Stoßart	$U(r)$	$\sigma$	$\nu$
Coulomb	$1/r$	$1/v^4$	$1/v^3$
Perm. Dipol	$1/r^2$	$1/v^2$	$1/v$
Induz. Dipol	$1/r^4$	$1/v$	const.
Harte Kugel	$0 (r > a)$	const. ( $\pi a^2$ )	$v$

Aus der Tabelle ist zu entnehmen, dass die Neutralstöße einen deutlich stärkeren Potentialabfall für ein stoßendes geladenes Teilchen (z. B. Elektron) aufweisen als ein gleichfalls geladenes Targetteilchen (= Cb-Stoß). Dementsprechend spielen nicht mehr die Kleinwinkelstöße mit großem Abstand, sondern vielmehr die Nahstöße die wesentliche Rolle.

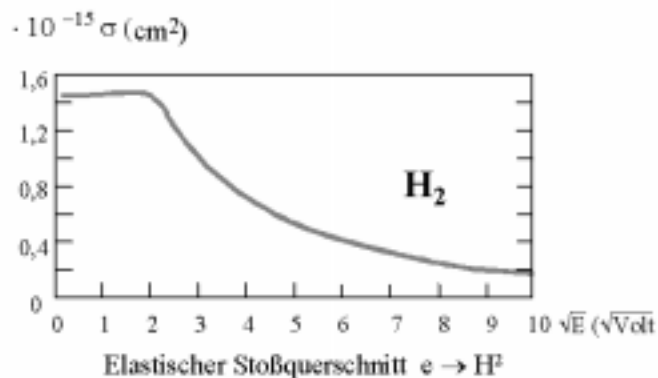
Für Niedertemperaturplasmen (*Plasmatechnologie*) sind Neutralteilchen (Atome, Moleküle, Radikale) mit permanentem oder induziertem Dipol von Bedeutung. Im Fall des induzierten Dipols folgt für größere Werte des Stoßparameters eine konstante Stoßfrequenz für das Testteilchen (s. obige Tabelle). Bei kleinerem Stoßabstand kann das Testteilchen in das Feldteilchen “stürzen” (und dort angelagert oder unter unbestimmtem Winkel wieder ausgestoßen werden). Die folgende Schemazeichnung veranschaulicht einen derartigen Einfangstoß bei induziertem Dipol:

Abbildung 2.5: Schemazeichnung für einen Einfangstoß



Als Beispiel für einen Stoßprozess mit induziertem Dipol zeigt die nachfolgende Abbildung den elastischen Stoßquerschnitt für das Wasserstoffmolekül. Oberhalb von 4 eV beginnt der Verlauf von  $\sigma$  gemäß  $E^{-1/2}$  (bzw. prop.  $1/v$ ), in diesem Bereich folgt eine konstante Ionisationsrate. Für kleinere Energien wird ein konstanter Querschnitt beobachtet. Hier ist eine quantenmechanische Behandlung erforderlich.

Abbildung 2.6: Elastischer Stoßquerschnitt  $e \rightarrow H^2$ .

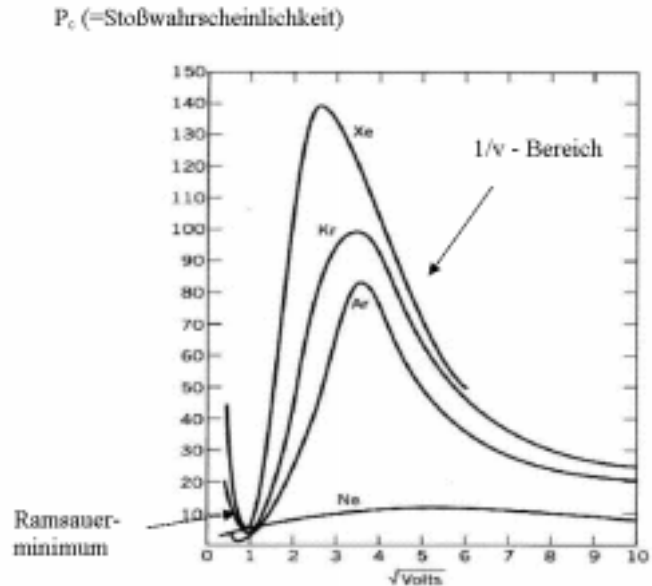


Weitere, besonders gut polarisierbare Atome bzw. Moleküle (mit steigender Polarisierbarkeit) sind:  $H_2O - O_2 - C - CO_2 - Cl_2 - CCl_4$ . In allen diesen Fällen findet man eine entsprechende Abhängigkeit des Stoßquerschnitts wie beim Wasserstoffmolekül.

Eine weitere, sehr wichtige Eigenschaft (speziell von Edelgasen) ist der *Ramsauer-Effekt*, d. h. ein extremes Stoßminimum bei sehr kleinen Energien des stoßenden Elektrons. Auch dieser Effekt ist quantenmechanisch zu erklären. Das nachfolgende Bild zeigt den tiefen Einbruch des

Stoßquerschnitts von Edelgasen unter 1 eV.

Abbildung 2.7: Elastische Stoßquerschnitte in Edelgasen (nach S. C. Brown).



## b) Inelastische Stöße: Elektronen-Stoßionisation

Bereits 1912 leitet Thomson den Ionisationsquerschnitt für Elektronenstoß rein klassisch her und findet als gut brauchbares Ergebnis:

$$\sigma_{ion} = \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{W_e} \cdot \left(\frac{1}{W_{ion}} - \frac{1}{W_e}\right) \text{ für } W_e \geq W_{ion}$$

$$\sigma = 0 \text{ für } W_e < W_{ion}$$

( $W_{ion}$  = Ionisationsenergie, Energie des einfallenden Elektrons  $W_e = mv_e^2/2 \cdot 1/e$ ; d. h. in eV einzugeben.)

Der Querschnitt nimmt bei  $W_e = 2W_{ion}$  ein Maximum an und fällt für große  $W_e$  mit  $1/W_e$  ab. Die **Ionisationsrate** (d. h. pro sek und Vol. gebildete Ionen (u. Elektronen)) ist offensichtlich:

$$\frac{dn_i}{dt} = n_e \cdot n_0 \cdot \langle \sigma v \rangle \left[ \frac{1}{m^3 \cdot s} \right]$$

Den dabei auftretenden **Ratenkoeffizienten**  $\langle \sigma v \rangle$  erhält man durch Integration (Faltung) über die Energieverteilung der Elektronen (von  $W_{ion}$  bis  $\infty$ ). Für eine Maxwell-Verteilung folgt:

$$R_{ion} = K \cdot \sqrt{T_e} \cdot \left(1 + \frac{2T_e}{W_{ion}}\right) \cdot e^{-\frac{W_{ion}}{T_e}}$$

mit:

$$K = \left(\frac{e}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot W_{ion}}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot e}{\pi \cdot m_e}}$$

Eine grobe Näherung für die Ionisierungsrate ist:

$$R_{ion} \approx K_i \cdot e^{-\frac{W_{ion}}{T_e}} \text{ mit } K_i \text{ typ. } 5 \times 10^{-14} m^3/s \text{ (z. B. Argon)}$$

Vielfach liegt in nicht-thermischen Niederdruckplasmen aber keine Maxwell-Verteilung vor. Der hochenergetische Teil der Verteilung - dort wo Ionisationsenergie geliefert wird - ist jetzt oft stark unterbesetzt. Folge: Die Ionisationsrate ist viel kleiner als es der mittleren Elektronenenergie entspricht (diese wird oft immer noch als "Temperatur" verstanden, was dann aber irrelevant wird)!

### c) Inelastische Stöße: Elektronen-Stoßanregung

Analog wie oben zu behandeln ist die **Stoßanregung**, d. h. die Anhebung eines gebundenen Elektrons auf ein angeregtes Niveau unterhalb der Ionisierungsgrenze  $W_{an} < W_{ion}$ , aus dem dann die Strahlungsabregung (Photon-Emission) erfolgt. Die nachfolgende Abbildung zeigt einen Vergleich der drei Stoßquerschnitte - elastischer Stoß, Anregungsstoß ( $n = 1$ ) und Ionisationsstoß - für Argon als Funktion der Elektronenenergie:

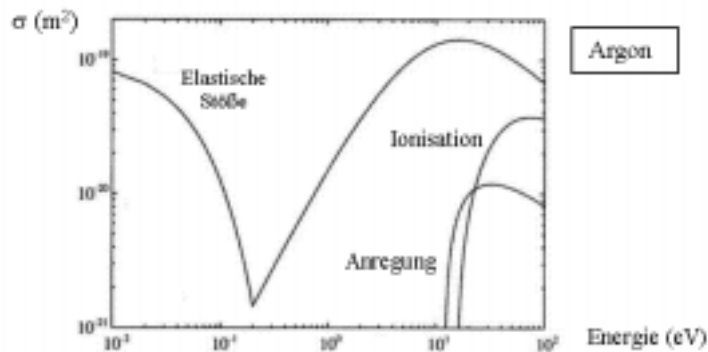


Abbildung 2.8: Elastische und inelastische Stoßquerschnitte in Argon.

Neben der Anregung diskreter elektronischer Niveaus spielt in teilionisierten Niedertemperaturplasmen auch die Anregung von Molekül-Resonanzen (Schwingungs-, Rotationsniveaus) eine große Rolle (*Molekülbanden*  $\Rightarrow$  Diagnostik-Möglichkeit).

### d) Umladungsstoß: $i \Rightarrow n_0$

Ein gleichfalls zu diskutierender Stoß ist der Ladungsaustausch- oder Umladungsstoß zwischen gleichen ("resonanter" Stoß) und ungleichen Teilchensorten ("nicht-resonanter" Stoß). Das einfache Schema eines Umladungsstoßes ist:

$$\text{Also: } n_s + i_1 \Leftrightarrow i_s + n_1$$

Der Vorgang kann (wie durch den Doppelpfeil angedeutet) natürlich in beiden Richtungen ablaufen!

Der Energietransfer durch Umwandlung schneller Neutraler in schnelle Ionen (und umgekehrt)



Abbildung 2.9: Schematische Darstellung eines Umladungsstoßes



über Umladungsstöße spielt sowohl in der Fusionsforschung als auch in der Plasmatechnologie eine große Rolle (z. B. Neutralteilcheninjektion zur Plasmaheizung, Oberflächenbeschuss von Festkörpern mit energiereicheren Neutralteilchen).

### e) Elektronenstöße mit Molekülen

Elektronenstöße mit Molekülen spielen eine wichtige Rolle in der Plasmachemie bzw. Plasmatechnologie. Wichtige Einzelprozesse sind:

- Vibrations- und Rotationsanregung

Die Anregung von Vibrations- (oder Rotations-) Freiheitsgraden. Da die Wechselwirkungszeit des Elektrons ( $10^{-16} - 10^{-15} \text{ s}$ ) klein ist gegen die Schwingungsperiode ( $10^{-14} - 10^{-13} \text{ s}$ ), kann das Molekül während des Stoßes als "in Ruhe" betrachtet werden. Das gestoßene Molekül nimmt einen Energiezustand ein gemäß:

$$E_\nu = \hbar\omega_{\text{vibr}} \cdot (\nu + 1/2) \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \text{ Vibrationsquantenzahl}$$

Mit der Näherung eines quadratischen Potentials um den Ruheabstand von zwei gebundenen Atomen = einfachstes Molekül folgt:

$$E_\nu = 1/2 k_{\text{vibr}} \cdot (R - R_0)^2 \quad k_{\text{vibr}} = \text{"Federkonstante"}$$

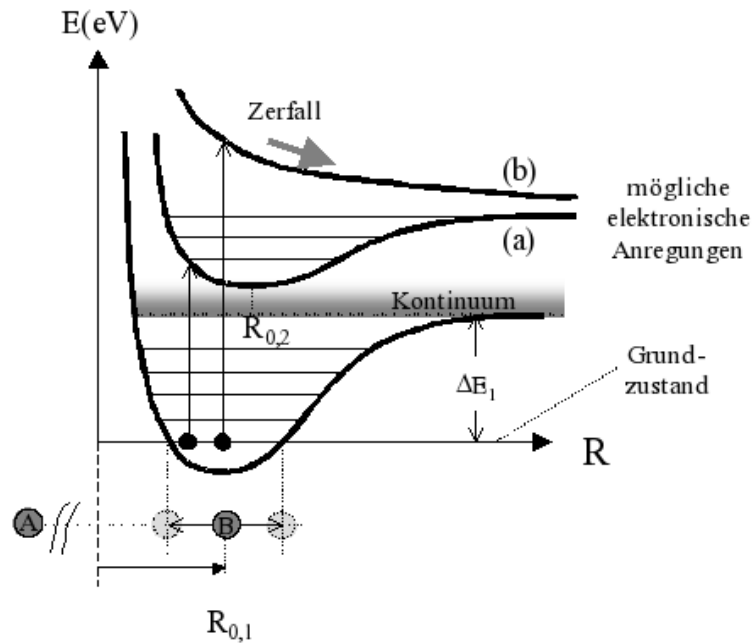
Entsprechend ergibt sich weiter:

$$\omega_{\text{vibr}} \approx \left( \frac{k_{\text{vibr}}}{M_{AB}} \right)^{1/2} \quad M_{AB} = \text{reduzierte Masse des Moleküls AB}$$

Abbildung 2.10 zeigt einige Energiezustände eines derartigen Moleküls. Entsprechend der Abbildung liegt auch im unteren Niveau des Grundzustandes ein endlicher Energiebetrag vor ( $\nu = 0 \rightarrow E_\nu = 1/2$ ). Es folgen die diskreten Schwingungsniveaus und danach das Kontinuum mit Aufbrechen des Moleküls (Dissoziationsenergie  $\Delta E_1$ ). Aber auch für die höherliegenden, elektronisch angeregten Energiezustände gibt es stabile Konfigurationen (Fall (a)) mit entsprechender Vibrationsanregung und dem mittleren Molekülabstand  $AB = R_{0,2}$ . Bei noch höherer Energie folgen nur rein abstoßende Potentiale d. h. ohne Vibrationsniveaus (Fall (b)). Dabei können auch ionisierte Moleküle (*Molekülionen*) gebildet werden, die wiederum in der Plasmachemie eine wichtige Rolle spielen (können).

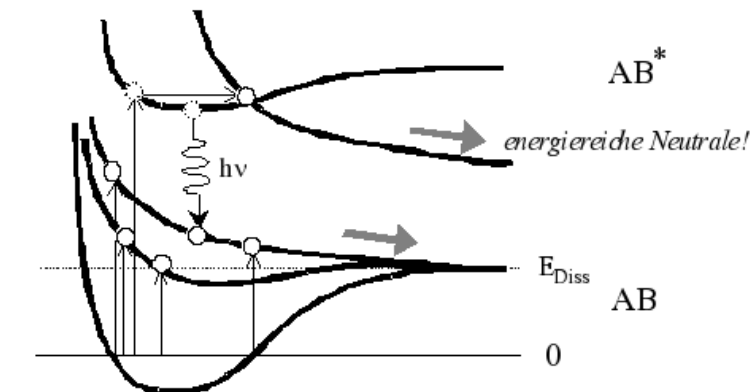
- Moleküldissoziation

Abbildung 2.10: Schematische Darstellung der Anregung von Molekülen



Die Moleküldissoziation durch Elektronenstoß erfolgt in der Regel - wie schon im vorangehenden Bild angedeutet - über eine vorausgehende Vibrationsanregung, wobei sich dann verschiedene Zerfallswege ergeben:

Abbildung 2.11: Dissoziationsmöglichkeiten eines Moleküls AB



Die Schemazeichnung veranschaulicht die verschiedenen Möglichkeiten der Dissoziation von Molekülen. Interessant (und wichtig) ist die Dissoziation aus einem angeregten Molekül, die zu energiereichen (einige eV) Neutralteilchen führen kann (*Frank-Condon-Effekt*).

- Bildung negativer Ionen

Gleichfalls wichtig in Niedertemperaturplasmen ist das Auftreten von negativen Ionen durch Elektronenanlagerung (Attachment). Dies ist vor allem bei den sogenannten "elektronegativen" Gasen (= "Elektronen-Fänger") der Fall, die besonders hohe Bindungsenergie für Elektronen aufweisen, d. h.  $O_2$ , die Halogenide (F, Cl, usw.) und deren Molekülverbindungen (z. B.  $SF_6$ ). Aber auch Wasserstoff bildet ein negatives Ion ( $H^-$ ) mit nur 0,7 eV Bindungsenergie. Negative Ionen spielen eine Rolle in der Plasmaätzchemie. Negativer Wasserstoff wird verwendet, um hochenergetische (Wasserstoff)-Neutralstrahlen (1 MeV) herzustellen, da das Elektron nach der Beschleunigung sehr leicht abzustreifen ist (verwendet zur Heizung und zum Stromtrieb in Fusionsplasmen).

Zusammenfassung: Stöße

Stöße zwischen den verschiedenen Plasmateilchen (**e, i, n**) werden beschrieben durch **Testteilchen und Feldteilchen**. Den Feldteilchen wird der gesamte Stoßquerschnitt  $\sigma [m^2]$  zugeordnet. Es folgt "**freie Weglänge**", gegeben durch  $\lambda = 1/(n_{feld} \cdot \sigma)$ , weiter folgen **Stoßfrequenz**  $\nu$  und die **Stoßzeit**  $\tau$ . Unterschieden wird: Austausch **kinetischer** Energie  $\rightarrow$  **elastischer Stoß**, Austausch **potentieller** Energie (Anregung, Dissoz., Ionisation)  $\rightarrow$  **inelastischer Stoß**.

Besonders wichtiger (elast.) Teilchenstoß: **Coulomb-Stoß** zwischen geladenen Teilchen. Dieser hat stark energieabhängigen Querschnitt:  $\sigma_{Cb} \propto 1/E_{kin}^2$  (d. h. für schnellere Testteilchen haben Feldteilchen kleineren Querschnitt!). Es folgt eine stark temperaturabhängige Stoßfrequenz:  $\nu_{Cb} \propto n \cdot T^{-3/2}$ .

Wichtig: Cb-Stoßquerschnitt ( $90^\circ$ ) ergibt sich nicht aus direktem (starkem) Stoß, sondern als (zufällige) **Summe vieler Kleinwinkelstöße** (100 x wichtiger).

**Stöße mit Neutralen** sehr komplex, aber wichtig in Niedertemperatur- (NT-)Plasma: elektronische Anregung, Anregung von Rotations-/Schwingungszuständen (bei Molekülen), Dissoziation, Ionisation, e-Attachment (= negative Ionen), Umladungsstoß. Wichtig dabei das wirksame Potential: induzierter Dipol, permanenter Dipol.

Häufig vorkommend: induzierter Dipol mit  $\sigma \propto 1/\sqrt{E_{kin}}$ , d. h.  $\nu \sim const.$

Bei sehr kleinen Energien u. U. sehr geringer Querschnitt (**Ramsauer-Effekt**). In einem solchen Gas sind kalte Elektronen weitgehend stoßfrei!



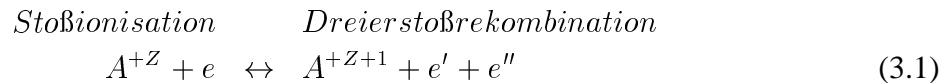
# Kapitel 3

## Thermodynamisches Gleichgewicht

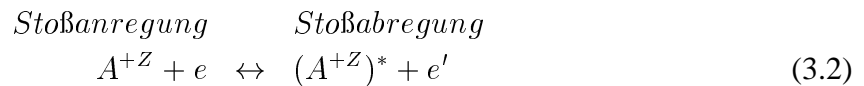
Ein physikalisches System befindet sich im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn alle Prozesse mit ihren Umkehrprozessen im Gleichgewicht sind. Wie wir sehen werden, sind in Plasmen diese Voraussetzungen nur selten erfüllt. Wir werden daher zunächst die zu betrachtenden Einzelprozesse, welche die Verteilung von Teilchen und Strahlung bestimmen, diskutieren. Im Anschluss werden verschiedene Verfahren zur Berechnung von Teilchendichten und Strahlungsleistung in stationären Zuständen, die nicht dem thermodynamischen Gleichgewicht entsprechen, dargestellt.

### Elementarprozesse und Ratengleichungen

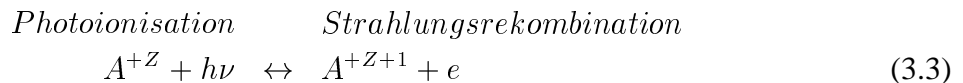
Die wichtigsten Prozesse, die zur Ausbildung eines stationären Zustands führen:



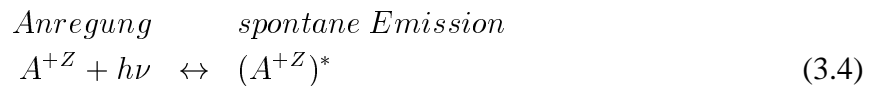
Hierbei kennzeichnet  $A^{+Z}$  ein Atom der Sorte  $A$  im Ladungszustand  $Z$  und  $e'$  ein Elektron mit veränderter Energie.



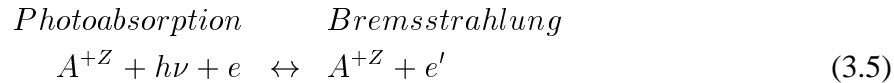
Dieser Prozess führt zu strahlungslosen Übergängen (sog. ‘Stöße zweiter Art’); er steht in Konkurrenz zur spontanen Emission.



Bei diesem Prozess geht das Elektron von einem gebundenen in den freien Zustand und umgekehrt über; die Photonenenergien sind also kontinuierlich verteilt. Es gibt aber eine untere Grenzenergie, welche der Ionisationsenergie des Zustands  $A^{+Z}$  entspricht.



Hier handelt es sich um Übergänge zwischen gebundenen Zuständen; es ergibt sich daher ein Linienspektrum.



Das Elektron geht von einem freien in einen anderen freien Zustand über; das Bremsstrahlungsspektrum ist daher kontinuierlich.

Aus diesen Prozessen sollen nun die folgenden Gleichgewichtsgrößen bestimmt werden:

- Ionisationsgleichgewicht: Verteilung der Häufigkeiten aller Ionisationsstufen  $A^Z$  sowie der Neutralen  $A^0$ .
- Strahlungsgleichgewicht: Aus der Zahl der emittierten Photonen pro Zeiteinheit ergibt sich  $\epsilon_\nu(\nu)$ , die emittierte Leistung pro Volumen, Raumwinkel und Frequenz ( $[\epsilon_\nu] = \text{W} / (\text{m}^3 \text{ sr Hz})$ ). Der Index  $\nu$  gibt an, dass es sich um eine differentielle Größe handelt, die Gesamtleistung pro Volumen und Raumwinkel ergibt sich durch Integration über alle Frequenzen. Die Absorption wird durch den Absorptionskoeffizienten  $\alpha'(\nu)$  charakterisiert. Dieser gibt an, nach welcher Weglänge die Strahldichte eines Strahles im Medium auf das  $1/e$ -fache abgeschwächt wird ( $[\alpha'(\nu)] = 1/\text{m}$ ).

Im allgemeinsten Fall stellt man für jeden der Prozesse (1) bis (5) eine sogenannte *Ratengleichung* auf. Diese ist von der Form einer Kontinuitätsgleichung, d. h.

$$\frac{dn}{dt} = \text{Quellen} - \text{Senken} \quad (6)$$

Dabei ergibt sich der Quellterm (bzw. die Senke) aus dem Produkt der Dichten der beteiligten Teilchensorten und dem entsprechenden Ratenkoeffizienten. Dieser gibt die Zahl von Reaktionen (Ionisation, Rekombination etc.) pro Zeiteinheit und Dichte der beteiligten Teilchen an. Für Zweierstöße setzt sich der Ratenkoeffizient zusammen aus dem Produkt der Relativgeschwindigkeit der Teilchen und dem Wirkungsquerschnitt für die betreffende Reaktion. Wir haben bereits gesehen, dass die Relativgeschwindigkeit in Plasmen häufig gleich der Elektronengeschwindigkeit ist, der Ratenkoeffizient lässt sich daher häufig als  $\langle \sigma v_e \rangle$  ausdrücken, wobei die Klammern eine Mittelung über die Maxwell-Verteilung bedeuten.

Die Ratengleichung für den Prozess (1) schreibt sich dann als

$$\frac{dn_{Z+1}}{dt} = n_e n_Z \langle \sigma_Z v \rangle_{\text{Stoßionisation}} - n_e^2 n_{Z+1} \beta_{Z+1, \text{Dreierrekombination}} \quad (7)$$

wobei  $\beta_{Z+1, \text{Dreierrekombination}}$  der entsprechende Ratenkoeffizient für den Dreierstoß ist. Die Ratengleichungen für die übrigen Prozesse ergeben sich analog. Prinzipiell kann man also alle Informationen durch simultanes Lösen der Ratengleichungen für alle Prozesse und Ionisationsstufen gewinnen. Man erhält so ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem. Zusätzlich zum mathematisch aufwendigen Problem der Lösung dieses Systems tritt jedoch eine weitere Schwierigkeit auf: Die Ratenkoeffizienten sind oftmals nicht mit der erforderlichen Genauigkeit berechenbar; experimentelle Daten liegen nur in begrenztem Umfang vor. Im Folgenden werden wir daher Voraussetzungen über die Gültigkeit des thermodynamischen Gleichgewichtes machen und somit einen anderen Zugang zu der Berechnung der Teilchen- und Strahlungsdichten finden.

## Vollständiges Gleichgewicht

Im vollständigen thermodynamischen Gleichgewicht ist jeder einzelne Prozess mit seinem Umkehrprozess im Gleichgewicht (detailliertes Gleichgewicht). Das System lässt sich dann durch Angabe einiger weniger thermodynamischer Variablen charakterisieren. Diese sind z. B. die Temperatur  $T$ , der Druck  $p$  und das chemische Potential  $\mu$ . Die Temperatur allein bestimmt bereits die Gleichgewichte von Teilchen und Strahlung über die folgenden Gleichungen:

- Die Teilchengeschwindigkeiten jeder Teilchensorte sind durch die Maxwell-Verteilung gegeben.
- Die Besetzung der Energieniveaus eines Atoms folgt der Boltzmann-Besetzung

$$\frac{n_k}{n_\ell} = \frac{g_k}{g_\ell} e^{-\frac{E_k - E_\ell}{k_B T}} \quad (8)$$

wobei  $g_k$  die Entartung des  $k$ -ten Niveaus bezeichnet.

- Wie aus der Thermodynamik bekannt, berechnet sich hieraus die Strahldichte  $L_\nu$ , d. h. die Leistung pro Fläche, Frequenz und Raumwinkel nach der Planckschen Formel für die Schwarzkörperstrahlung

$$L_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \equiv B_\nu(T) \quad (9)$$

Die Einheit ist also  $[B_\nu] = \text{W}/(\text{m}^2 \text{ sr Hz})$ .

- Die abgestrahlte Gesamtleistung pro Fläche ergibt sich nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz zu

$$E_{ges} = \sigma T^4 \quad (10)$$

mit  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$ .

- Die Teilchenzahl in unterschiedlichen Ionisationsstufen berechnet sich nach der *Saha-Gleichung*

$$\frac{n_{Z+1} n_e}{n_Z} = \frac{g_{Z+1}}{g_Z} \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{W_{i,Z}}{k_B T}} \quad (11)$$

wobei  $W_{i,Z}$  die Ionisationsenergie der Ladungsstufe  $Z$  ist.

Die Ableitung der Saha-Gleichung gestaltet sich wie folgt: Im Gleichgewicht ist  $d/dt = 0$ , daher lässt sich Gleichung (7) umschreiben in

$$\frac{n_{Z+1} n_e}{n_Z} = \frac{\langle \sigma_Z v \rangle_{\text{Stoßionisation}}}{\beta_{Z+1, \text{Dreierrekombination}}} = f(T) \quad (12)$$

Diese Gleichung hat die Form eines Massenwirkungsgesetzes für  $n_Z$ ,  $n_{Z+1}$  und  $n_e$ . Anstelle der Auswertung der Ratenkoeffizienten kann man im thermodynamischen Gleichgewicht die temperaturabhängige Reaktionskonstante wie folgt berechnen: Das Verhältnis der Besetzung der unterschiedlichen Ionisationsstufen erhält man aus der Boltzmann-Besetzung

$$\frac{n_{Z+1}}{n_Z} = \frac{g_{Z+1}}{g_Z} e^{-\frac{E_{Z+1}-E_Z}{k_B T}} = \frac{g_{Z+1}}{g_Z} e^{-\frac{W_{i,Z}}{k_B T}} \quad (13)$$

Die Dichte der freien Elektronen bei der Energie  $E$  ist entsprechend der Boltzmann-Verteilung gegeben:  $dn_e = g(E) \exp(-E/k_B T) dE$ . Das Produkt  $n_{Z+1} n_e / n_Z$  ergibt sich daher durch Integration über alle Energien

$$\frac{n_{Z+1} n_e}{n_Z} = \frac{g_{Z+1}}{g_Z} e^{-\frac{W_{i,Z}}{k_B T}} \frac{(2m_e^3)^{1/2}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \sqrt{E} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE \quad (14)$$

Das Integral ergibt  $1/2 \sqrt{\pi} (k_B T)^{3/2}$ , sodass man als Endergebnis obige Gleichung (11) erhält. Diese Ableitung berücksichtigte nur die Grundzustände der einzelnen Ionisationsstufen. Eine genauere Ableitung zeigt, dass bei Berücksichtigung der angeregten Zustände die Entartungsgrade  $g_Z$  durch die Zustandssumme  $Q_Z = \sum_k g_{Z,k} \exp(-(E_{Z,k} - E_{1,k})/(k_B T))$  zu ersetzen ist.

Die Summation verläuft dabei über alle angeregten Zustände  $k$  einer Ionisationsstufe. Beim Wasserstoff liegen die angeregten Niveaus bei relativ hohen Energien ( $\approx 10$  eV) und somit ist bei niedriger Temperatur hauptsächlich der Grundzustand bevölkert. Hier lässt sich also mit  $W_i = 13.6$  eV,  $n_e = n_i = n_{Z+1}$ ,  $n_Z = n_0$ ,  $g_0 = 2$  und  $g_1 = 1$  der Ionisationsgrad für  $T \approx 1$  eV direkt aus der Saha-Gleichung als  $f(n, T)$  berechnen. Für Dichten  $> 10^{25} \text{ m}^{-3}$  muss man allerdings in der Saha-Gleichung die Erniedrigung der Ionisationsenergie durch die atomaren  $E$ -Felder (Mikrofelder) berücksichtigen.

Wie bereits oben erwähnt, sind die Teilchengeschwindigkeiten im vollständigen thermischen Gleichgewicht durch die Maxwell-Verteilung gegeben. Diese soll im Folgenden näher untersucht werden.

## Geschwindigkeitsverteilung, Temperatur

Eine Verteilungsfunktion im Geschwindigkeitsraum erhält man folgendermaßen:

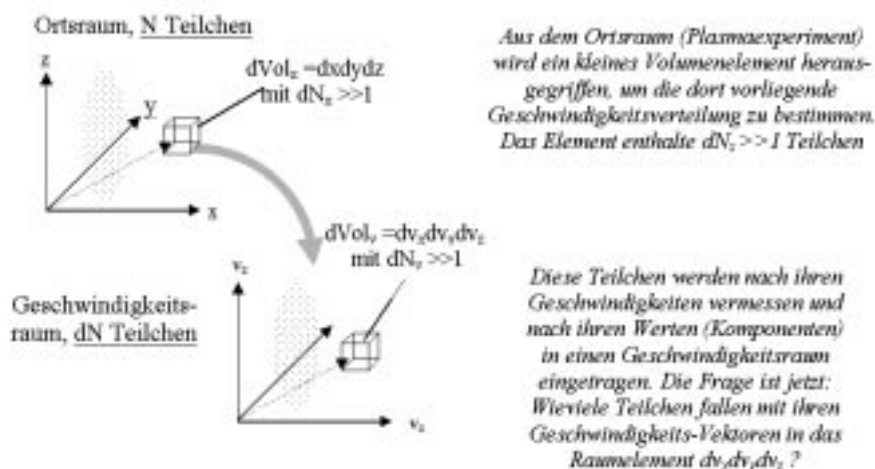


Abbildung 3.1: Konstruktion einer Verteilungsfunktion im Geschwindigkeitsraum

Die gefundene Teilchenzahl  $dN_v/dVol_v$  wird noch auf das Ortsraumelement  $dVol_x$  bezogen ( $dN_v/(dx \cdot dy \cdot dz) = dn[1/m^3]$ ) und wird dargestellt durch die *Verteilungsfunktion*  $f$ :



$$\frac{dn}{d\vec{v}} = f(\vec{v}) \left[ \frac{1}{m^3} \cdot \frac{1}{m^3/s^3} \right]$$

Das Integral über  $dN$  gibt entsprechend die Ortsraumdichte  $n$ . Im Folgenden wird nun die normierte Verteilungsfunktion oder *Wahrscheinlichkeitsdichte* im Geschwindigkeitsraum betrachtet. Dies wäre dann die Wahrscheinlichkeit  $w$ , ein Teilchen mit einem bestimmten (vorgegebenen) Geschwindigkeitsvektor anzutreffen. Diese ist demnach:

$$\frac{dn}{n} = \frac{f(\vec{v}) d\vec{v}}{n} = \omega(\vec{v}) d\vec{v} \left[ \text{dim}^0 \right]$$

Die resultierende Verteilungsfunktion  $w$  kann nun unter zwei einfachen Annahmen abgeleitet werden:

- Annahme 1: Statistische Unabhängigkeit der Geschwindigkeitskomponenten

Wenn ein Teilchen mit (z. B.)  $v_x = 1 \text{ km/s}$  gefunden wird, so seien seine beiden anderen Komponenten,  $v_y$  und  $v_z$ , unabhängig davon und könnten im Prinzip jeden "x-beliebigen" Wert zwischen 0 und  $\pm\infty$  annehmen<sup>1</sup>. Mit  $w_x$ ,  $w_y$ , und  $w_z$  für die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichten der drei Geschwindigkeitskomponenten folgt damit:

$$\omega_x dv_x \cdot \omega_y dv_y \cdot \omega_z dv_z \equiv \vec{\omega} d\vec{v}$$

- Annahme 2: Isotropie der Geschwindigkeitsverteilung

Die Geschwindigkeitskomponenten der Teilchen seien isotrop verteilt, keine Raumrichtung sei ausgezeichnet.

Somit gilt:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z$$

d. h. für alle Richtungen ergibt sich das gleiche Funktional. Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $w$  lässt sich nun umschreiben in die Funktion  $g(v^2)$  bzw.  $w_x(v_x)$  in  $g_x(v_x^2)$  usw. Es gilt also:

$$\omega(\vec{v}) = g(v^2) = g(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = g(v_x^2) \cdot g(v_y^2) \cdot g(v_z^2)$$

Diese *Funktionalgleichung* wird offensichtlich durch die Exponentialfunktion erfüllt.

$$\omega(\vec{v}) = \alpha \cdot e^{\beta v^2}$$

Die zwei noch freien Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  folgen unmittelbar aus Normierungsbedingungen:

---

<sup>1</sup>Achtung: Die Annahme 1 ist in vielen Fällen verletzt, speziell in Prozessplasmen. Hier kann es für "schnelle" Elektronen so starke Energieverluste geben (inelastische Stöße!), dass entsprechend hohe Beträge der Geschwindigkeit (bzw. Energie) völlig ausfallen. Wenn also ein Elektron mit einer  $v_x$ -Komponenten schon nahe der Maximalgeschwindigkeit gefunden wird, müssen die anderen beiden Komponenten entsprechend nahe bei Null sein, d. h. es ist keine statistische Unabhängigkeit mehr gegeben! Dann liegt auch keine Maxwell-Verteilung vor.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\vec{v}) d\vec{v} \equiv 1 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\vec{v}) \cdot v^2 d\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} v_{eff}^2$$

mit dem Ergebnis:

$$\alpha = \left[\frac{\beta}{\pi}\right]^{3/2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{3}{2v_{eff}^2}$$

Jetzt wird noch der *Temperaturbegriff* eingeführt:

$$\frac{m}{2}v_{eff}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3}{2}k_B T$$

Damit ergibt sich die Verteilungsfunktion (Wahrscheinlichkeitsdichte) des **Geschwindigkeitsvektors**  $\vec{v}$  zu:

$$\omega(\vec{v}) = \left[\frac{m}{2\pi \cdot k_B T}\right]^{3/2} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2}/k_B T} \dots \text{mit Maximum bei } v = 0!$$

Hierzu die entsprechende Darstellung im Geschwindigkeitsraum:

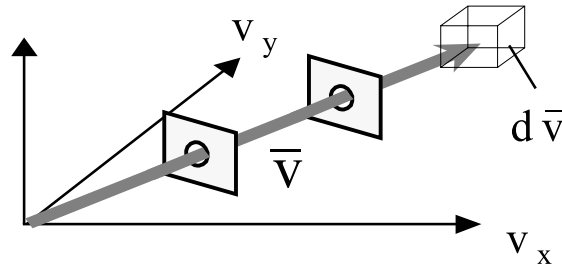


Abbildung 3.2: Bestimmung des Geschwindigkeitsvektors

Diese Verteilung wäre z. B. gefragt bei winkelaufgelöster Teilchenflussmessung (angedeutet: Teilchendetektor mit Zwei-Blendensystem).

Neben der Verteilung des Geschwindigkeitsvektors interessiert aber auch die Verteilung der **Geschwindigkeitskomponenten** (z. B. in Richtung der x-Achse). Diese Funktion erhält man gemäß  $w(\vec{v}) = w(v_x) \cdot w(v_y) \cdot w(v_z)$  als die 3. Wurzel aus  $w(\vec{v})$  (vgl. Abbildung 3.3).

Interessanterweise haben sowohl Verteilung des Geschwindigkeitsvektors wie die seiner Komponenten ihr Maximum bei  $v$  bzw.  $\vec{v}_{x,y,z} = 0$ , d. h. hier findet man die meisten Teilchen!

Für andere Fragestellungen ist nun auch noch die Verteilung des **Geschwindigkeitsbetrages** von Interesse. Diesen Zusammenhang erhält man durch Aufsummieren aller Geschwindigkeitsvektoren die in eine bestimmte Kugelschale, nämlich die zwischen den Radien  $|\vec{v}|$  und  $|\vec{v} + \delta\vec{v}|$  hineinfallen. Dies führt auf die einfache Multiplikation mit diesem Kugelschalenvolumen. Man erhält:

$$\omega(|v|) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{mv^2}{2}/k_B T\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2}/k_B T}$$

Abbildung 3.3: Geschwindigkeitskomponenten:

Die Verteilung der Geschwindigkeitskomponenten in eine bestimmte (z. B.  $x$ -) Richtung gibt den Teilchenfluss in diese Richtung (z. B. auf Oberfläche):

$$\omega(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi \cdot k_B T}} \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}}$$

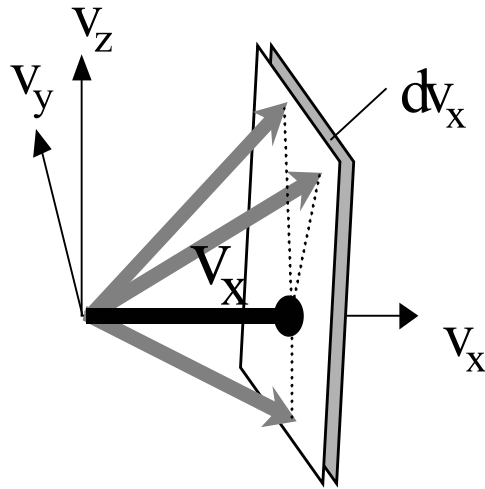
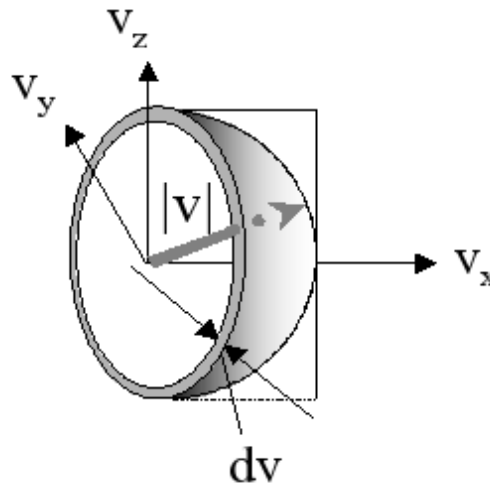


Abbildung 3.4:

Geschwindigkeitsbetrag:

Die Verteilung des Betrages der Teilchengeschwindigkeiten (zugleich die Energieverteilung) ist maßgebend für alle energiebestimmten Stoßprozesse.



Dies ist die bekannte **Maxwell-Verteilung** des Geschwindigkeitsbetrages bzw. der Energie der Teilchen. Man erkennt, dass die Maxwell-Verteilung bei der Geschwindigkeit  $|v| = 0$  (bzw.  $v^2 = 0$ ) den Wert Null annimmt. Die Wahrscheinlichkeit, ein absolut ruhendes Teilchen zu finden, liegt also bei Null!

Grafisch dargestellt, ergibt sich für die Maxwell-Verteilung die in Abbildung 3.5 dargestellte Kurve:

Als Geschwindigkeitseinheit ist hier die (manchmal als “Thermische” Geschwindigkeit bezeichnete) Größe  $\sqrt{k_B T/m}$  verwendet. Neben dieser Normierung sind auf der Kurve drei weitere Geschwindigkeiten markiert, nämlich:

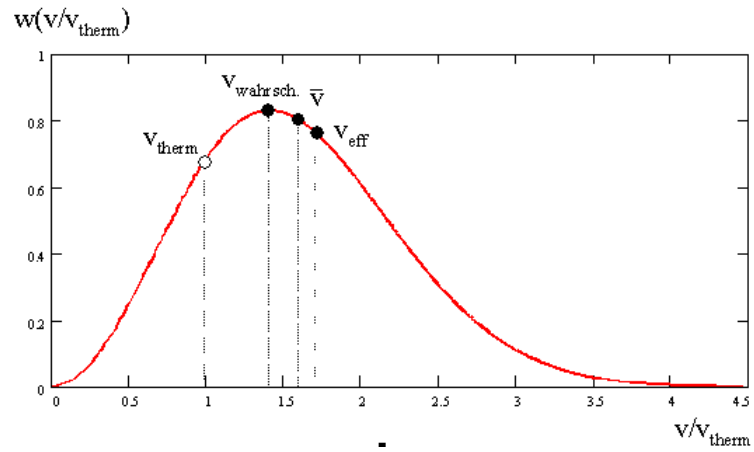
- die häufigste (wahrscheinlichste) Geschwindigkeit = Maximum der Kurve, d. h.

$$d\omega(v)/dv = 0$$

- die mittlere Geschwindigkeit, definiert durch das Integral über die Kurve, also:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} |v| \cdot \omega(v) dv$$

Abbildung 3.5: Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung



- die Effektivgeschwindigkeit als mittleres Geschwindigkeitsquadrat:

$$v_{eff} = \left( \int_0^{\infty} v^2 \cdot \omega(v) dv \right)^{1/2}$$

Aus den angegebenen Gleichungen ergeben sich die einzelnen Geschwindigkeiten zu:

“Thermische” Geschwindigkeit  $v_{therm} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

wahrscheinliche Geschwindigkeit  $v_{wahrsch} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

Effektiv- Geschwindigkeit  $v_{eff} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

Je nach Fragestellung ist eine der obigen Geschwindigkeiten zu verwenden.

## Lokales thermisches Gleichgewicht

In der Praxis sind die Bedingungen für das vollständige thermodynamische Gleichgewicht fast nie erfüllt. Dies liegt daran, dass in Plasmen generell Temperatur- und Dichtegradienten auftreten. Man behilft sich damit, Bereiche zu definieren, in denen die Gradientenlängen groß gegen die freie Weglänge von Teilchen und Photonen sind. In diesen Bereichen kann man für das Plasma näherungsweise konstante Dichte und Temperatur annehmen. Sind diese Verhältnisse gegeben, spricht man vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht (LTE). Diese Beschreibungsweise trifft vor allem im Sonneninneren recht gut zu.

Bei hinreichend hoher Stoßrate sind die Stoßionisation/Dreierstoßrekombination (1) und Stoßanregung/Stoßabregung (2) im detaillierten Gleichgewicht und somit gelten Maxwell-Verteilung, Boltzmann-Besetzung und Saha-Gleichung. Ein Problem ergibt sich bei den Prozessen (3) bis (5). Hier sind Photonen beteiligt. Im detaillierten Gleichgewicht müssen genauso viele Photonen emittiert wie absorbiert werden. In der Praxis ist dies oft nicht der Fall, da Photonen im Plasma eine relativ große freie Weglänge haben und somit entweichen können.

Dies sieht man sofort für ein kugelförmiges Fusionsplasma von Radius  $r = 1$  m,  $T = 10$  keV und  $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ . Im thermodynamischen Gleichgewicht ergäbe sich die abgestrahlte Leistung nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz zu  $P_{rad} = 4\pi r^2 \sigma T^4 = 1.4 \times 10^{26} \text{ W}(!)$ . Die gespeicherte Energie beträgt  $4\pi r^3 n k_B T = 2 \times 10^6 \text{ J}$ , d. h. die gespeicherte Energie würde in  $\approx 10^{-20} \text{ s}$  abgestrahlt. Ein Fusionsplasma kann also bezüglich der Strahlung nicht im thermodynamischen Gleichgewicht sein. Damit sind die Plancksche Strahlungsformel und das Stefan-Boltzmann-Gesetz nicht mehr anwendbar.

Eine genauere Untersuchung der Strahlung muss daher von der Strahlungstransportgleichung ausgehen. Sie ist wiederum von der Form einer (räumlichen) Kontinuitätsgleichung  $dL_\nu/dx = \text{Quellen} - \text{Senken}$  für die Strahldichte  $L_\nu$ , d. h. die Leistung pro Fläche, Frequenz und Raumwinkel. Als Quelle hat man den Emissionskoeffizienten durch spontane Emission  $\epsilon_\nu(\nu)$  sowie den Beitrag der induzierten Emission  $dL_\nu/dx = \beta L_\nu$  zu berücksichtigen ( $[\beta] = 1/\text{m}$ ). Die Senke bildet die Absorption von Photonen, d. h.  $dL_\nu/dx = -\alpha L_\nu$  ( $[\alpha] = 1/\text{m}$ ). Wir erhalten also

$$\frac{dL_\nu}{dx} = \epsilon_\nu - (\alpha - \beta)L_\nu$$

Wir fassen nun  $(\alpha - \beta)$  zum effektiven Absorptionskoeffizienten  $\alpha'(\nu)$  zusammen. Diese Größe wurde bereits oben eingeführt. Nach Zusammenfassen und Division durch  $\alpha'$  folgt

$$\frac{1}{\alpha'} \frac{dL_\nu}{dx} = \frac{\epsilon_\nu}{\alpha'} - L_\nu$$

Das Verhältnis  $\epsilon_\nu/\alpha'$  erhalten wir analog zur Ableitung der Planckschen Formel in der Thermodynamik mit Hilfe der Einsteinkoeffizienten für Emission und Absorption zwischen zwei Niveaus 1 und 2 mit Besetzungsdichte  $n_1$  und  $n_2$  aus dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts:

$$\frac{\epsilon_\nu}{\alpha' L_\nu} = \frac{c}{4\pi L_\nu} \frac{A_{21} n_2}{(B_{12} n_1 - B_{21} n_2)} = \frac{c}{4\pi L_\nu} \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{n_2}{n_1 - n_2} = \frac{2h\nu^3}{L_\nu c^2} \frac{n_2}{n_1 - n_2}$$

Dabei haben wir die aus der Atomphysik bekannten Relationen  $B_{12} = B_{21}$  und  $A_{21}/B_{21} = 8\pi h\nu^3/c^3$  verwendet. Wie oben erwähnt, gilt bei genügend hoher Stoßrate die Boltzmann-Besetzung der Niveaus 1 und 2 und wir erhalten

$$\frac{\epsilon_\nu}{\alpha'} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} = B_\nu(T)$$

Diese Beziehung ist als Kirchhoffscher Satz bekannt. Bei genügend hoher Stoßrate gilt es auch dann, wenn die Photonen selbst entweichen können, d. h. wenn die Bedingungen für Schwarzkörperstrahlung nicht mehr gegeben sind. Mit dieser Beziehung können wir die Strahlungstransportgleichung umschreiben

$$\frac{1}{\alpha'} \frac{dL_\nu}{dx} = B_\nu(T) - L_\nu$$

Es ist zweckmäßig, die dimensionslose Variable  $\tau$  einzuführen. Diese bezeichnet man als *optische Dicke*:

$$\tau = \int_x^{x_0} \alpha' dx$$

Das Integral erstreckt sich längs des Sichtstrahls von einem Ort  $x$  im Plasma zum Ort  $x_0$ , an dem die Strahlung detektiert wird. Die Strahlungstransportgleichung lässt sich dann lösen und wir erhalten

$$L_\nu(\tau) = B_\nu(T)(1 - e^{-\tau})$$

Für  $\tau \ll 1$  wächst also die Strahldichte linear mit der Schichtdicke, dieser Fall wird als optisch dünn bezeichnet. Für  $\tau \gg 1$  (optisch dicker Fall) nähert sich die Strahldichte asymptotisch der Schwarzkörperstrahlung an.

Wie bereits oben erwähnt, liegt in Plasmen oft der optisch dünne Fall vor, v. a. bei der Kontinuumsstrahlung, für die der Absorptionskoeffizient klein ist. Dies ändert sich in der Nähe der Resonanzlinien, d. h. bei Frequenzen, die den Anregungen der Atome aus dem Grundzustand entsprechen. Abbildung 3.6 zeigt eine Modellrechnung für die optische Dicke der Lyman Serie des Wasserstoffs in einem kalten, dichten Plasma, wie es z. B. typisch für eine Bogenentladung ist. In der Nähe der Linienzentren wird v. a.  $L_\alpha$  optisch dick (die Linienverbreiterung durch Dopplereffekt ist stark übertrieben dargestellt). Dies findet sich wieder im Emissionsspektrum, das in der Abbildung darunter dargestellt ist: Im Linienzentrum erreicht die Strahldichte den durch die Planck-Kurve gegebenen Wert, im Kontinuum verschwindet sie praktisch. Daher liegt die abgestrahlte Gesamtleistung weit unter dem mit dem (durch Integration der Planck-Kurve

gewonnenen) Stefan-Boltzmann-Gesetz berechneten Wert.

Abbildung 3.6: Optische Dicke eines Plasmas im spektralen Bereich der Lyman- $\alpha$  Serie.

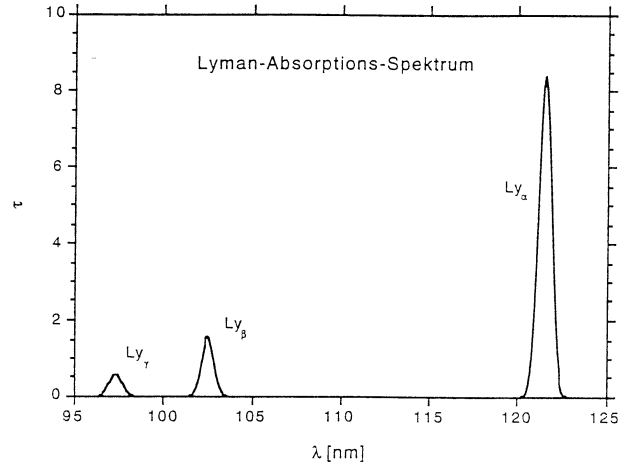
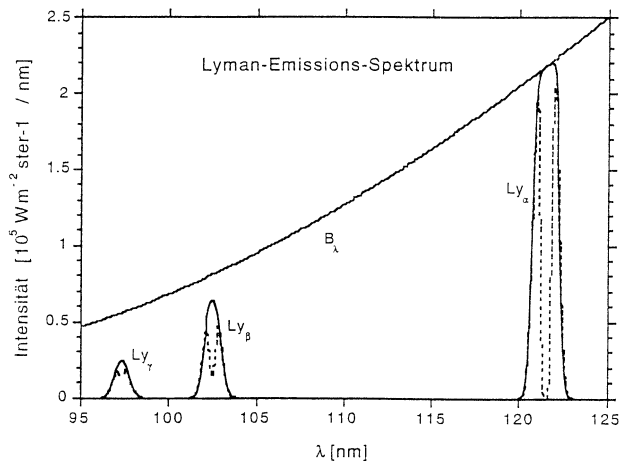


Abbildung 3.7: Strahldichte der emittierten Strahlung für die Parameter aus Abbildung 3.6. Die Strahldichte der Linienzentren nähert sich der ebenfalls eingezeichneten Strahldichte eines schwarzen Strahlers an. Die gestrichelte Linie beschreibt den Fall einer vorgelagerten kalten Schicht niedrigerer Temperatur; es tritt Selbstumkehr auf.



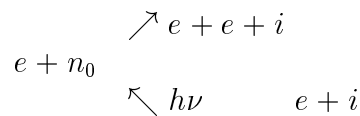
Befindet sich vor dem Emissionsvolumen mit  $T = T_1$  eine kalte Gas- oder Plasmaschicht mit  $T = T_2 \ll T_1$ , welche an den Resonanzlinien stark absorbierend ist, so wird die Strahlung dort reabsorbiert und -emittiert. Die Strahldichte der reemittierten Strahlung erreicht jedoch maximal den durch  $B_\nu(T_2)$  gegebenen Wert. Wird zum Beispiel das Licht einer Plasmaentladung mit  $T_1 = 1$  eV im vorgelagerten Gas von Raumtemperatur ( $T_2 \approx 0.03$  eV) absorbiert und reemittiert, so fällt die Strahldichte im Linienzentrum mindestens um den Faktor  $B_\nu(T_2)/B_\nu(T_1) \approx \exp(-33) \approx 10^{-15} \approx 0$ . Da die Dopplerverbreiterung mit der Temperatur abnimmt, fällt die Strahldichte im Linienzentrum auf ein Minimum. Dies ist in der rechten Abbildung angedeutet. Den Effekt bezeichnet man als *Selbstumkehr* der Linien.

Ein weiteres Beispiel findet sich in der Sonne: Dort wird die aus der (optisch dicken) Photosphäre abgestrahlte Kontinuumsstrahlung im kalten Gas der Sonnenperipherie absorbiert; da das kalte Gas nur bei den Wasserstoffspektrallinien stark reabsorbiert, ergeben sich Absorptionslinien im Sonnenspektrum bei den Frequenzen der Wasserstoff-Spektralserien. Diese sind als *Fraunhoferlinien* bekannt.

## Koronagleichgewicht

Mit abnehmender Dichte wird die Stoßrate so klein, dass das detaillierte Gleichgewicht auch in den stoßbestimmten Prozessen (1) und (2) nicht mehr gegeben ist. Wir erhalten dann ein nicht-thermisches Plasma. Der kritische Prozess ist hierbei die Dreierstoßrekombination, der mit  $n_e^2 n_{Z+1}$  sinkt.

Dagegen sinkt bei abnehmender Dichte die Rate für die Strahlungsrekombination in (3) nur mit  $n_e n_{Z+1}$ , während der inverse Prozess, die Photoionisation, wegen der großen freien Weglänge der Photonen immer unwahrscheinlicher wird. Bei geringer Dichte wird also die Ionisation hauptsächlich durch Stoßionisation, die Rekombination durch Strahlungsrekombination geschehen. Die dabei entstehenden Photonen verlassen in der Regel das Plasma, ohne reabsorbiert zu werden.



In den entsprechenden Ratengleichungen sind die auftretenden Ratenkoeffizienten nur von der Temperatur abhängig. Daher folgt:

$$\frac{n_e}{n_0} = f(T_e)$$

Das oben beschriebene Modell wurde erstmals auf die Sonnenkorona angewandt, daher hat sich der Name “Korona-Gleichgewicht” eingebürgert. Das resultierende Ionisationsgleichgewicht oder der daraus unmittelbar ableitbare Ionisationsgrad ( $\eta_{ion} = n_e / (n_e + n_0)$ ) weichen häufig ganz erheblich von Saha- bzw. (vor allem) Korona-Gleichgewicht ab, d. h. der Ionisationsgrad bleibt weit hinter diesen Werten zurück. Dies ist dann der Fall, wenn auch die Möglichkeit der **Wandrekombination** hinzu kommt. Diese ist besonders effizient, da mit der Wand als “drittem Partner” sowohl Impuls- als auch Energiesatz gleichzeitig erfüllt werden können. Dieser Rekombinationsweg wird offensichtlich dann wirksam, wenn die Rekombinationszeit im Volumen (also ohne Gegenwart einer Wand) deutlich größer ausfällt als die Laufzeit der Teilchen (Ionen + Elektronen) bis hin zur Wand, wenn also gilt:

$$\tau_{rekomb} = \frac{n_e}{dn_e/dt} \gg \tau_{lauf} = L/v_{aus}$$



Dabei ergibt sich die hier maßgebliche Ausströmgeschwindigkeit  $v$  aus den Transportbedingungen. Im Fall sehr kleiner Dichten (also eigentlich Korona-Gleichgewicht) ergibt sich der sogenannte Frei-Fall, also ein maximales Aus- oder Abströmen mit Ionenschallgeschwindigkeit  $c_s$  (vgl. Kapitel 5). In diesem Fall ergeben sich Werte von  $v_{aus} \approx c_s = O$  (einige 1000 m/s). Bei zugleich kleinen Dimensionen  $L$  (d. h. geringer Laufweg) folgen dann sehr kurze Auslaufzeiten  $\tau_{lauf}$ , sodass sich die Plasmadichte weit unter dem Korona-Wert einstellt. Bei höheren Dichten fließen die Ionen erheblich langsamer in Richtung Wand. Bei kleineren Gefäßdimensionen bleibt aber auch hier der Ionisierungsgrad deutlich hinter dem zugehörigen Korona- oder Saha-Wert zurück. Neben dem Ionisationsgleichgewicht sind in der Plasmatechnik auch die Gleichgewichtszustände zwischen den Reaktionspartnern im Plasma (d. h. Moleküle, Atome, Radikale) von Bedeutung (Plasmachemie!). Diese erhält man auf analoge Weise. Vielfach liegt aber auch ein Nichtgleichgewicht vor, wobei sich besonders interessante Anwendungsfelder ergeben (*“Nicht-Gleichgewichts-Chemie”*). Ein derartiges Nicht-Gleichgewicht stellt sich ein, wenn die Reaktionspartner zu schnell abgekühlt werden, in Oberflächenschichten eingebaut werden oder schnell die Reaktionszone verlassen.

Schließlich sei noch angemerkt, dass vielfach für die Elektronen gar keine *“Temperatur”* vorliegt, d. h. das Plasma hat keine Maxwell-Verteilung. Dies bedeutet, dass eine der Annahmen bei der Temperaturherleitung nicht gegeben ist. Dies ist die vorausgesetzte Gleichverteilung der Geschwindigkeiten, die sich nur bei *“hinreichend vielen”* Stößen einstellt (Abbau des hochenergetischen Bereichs (*“Schwanz”*) der Maxwell-Verteilung durch inelastische Stöße und nicht-hinreichende Auffüllung). Derartige Plasmen könnte man “doppelt-nichtthermisch” nennen: doppelt, weil  $T_e \gg T_i$  und weil  $T_e$  eigentlich keine volle Maxwell-Verteilung darstellt.

#### *Zusammenfassung: Thermodynamisches Gleichgewicht*

*Im thermischen Gleichgewicht sind alle Prozesse mit ihren Umkehrprozessen im Gleichgewicht. Dann ist die Teilchengeschwindigkeit durch eine Maxwell-Verteilung gegeben. Die Besetzung der Energieniveaus erfolgt entsprechend der Boltzmann-Verteilung. Gleichgewicht zwischen Emission und Absorption bedeutet Schwarzkörperstrahlung. Das Ionisationsgleichgewicht ist durch die Saha-Gleichung gegeben. Lokales thermodynamisches Gleichgewicht bedeutet, dass die mittlere freie Weglänge der Photonen nicht mehr klein gegen die Gradientenlänge im System ist. Es gibt also kein thermodynamisches Gleichgewicht bezüglich der Strahlung, Maxwell-Verteilung, Boltzmann-Besetzung der Energieniveaus und Saha-Gleichung bleiben dagegen erfüllt. Für den Strahlungstransport sind Plancksche Strahlungsformeln und Stefan-Boltzmann-Gesetz nicht mehr anwendbar. Stattdessen werden der Kirchhoffsche Satz und das Konzept der optischen Dicke verwendet.*

*Für noch geringere Dichten sind auch die stoßbestimmten Prozesse nicht mehr im Gleichgewicht. Kritisch ist dabei insbesondere die Dreierstoßrekombination. Im sogenannten Korona-Gleichgewicht stellt sich ein Gleichgewicht zwischen Ionisation und Strahlungsrekombination ein. Für sehr dünne Plasmen kann es auch Abweichungen vom Korona-Gleichgewicht geben. In dem Fall müssen dann die Ratengleichungen gelöst werden. Insbesondere Wandrekombination wird wichtig, wenn die Laufzeit der Teilchen bis zur Wand kleiner als die Rekombinationszeit im Volumen ist.*



# Kapitel 4

## Diffusion und Transport

Der Transport von Teilchen und Energie spielt eine wesentliche Rolle für alle Arten von Plasmen: Teilchen und Energie “fließen”, d. h. diffundieren bzw. strömen auf die umgebenden Wände und müssen - soll das Plasma stationär sein - durch geeignete Quellen (Teilchenquellen = lokale Ionisation von einströmenden Neutralen bzw. Energiequellen = Plasmaheizung) permanent ersetzt werden. Im Folgenden sollen die maßgeblichen Transportprozesse **Diffusion** bzw. (bei großer freier Weglänge) **freies Abströmen** genauer betrachtet werden.

### Transportgleichungen

Um Transportgleichungen abzuleiten, müssen wir die Flüsse und Quellen in einem Gebiet bilanzieren. Dies soll exemplarisch für den Teilchentransport geschehen. Für den Energietransport gelten analoge Überlegungen.

Für die Teilchenbilanz betrachten wir ein Volumen  $V$  mit Oberfläche  $A$ ; auf dieser senkrecht steht der Normalenvektor  $d\vec{A}$ . Die Verhältnisse sind in folgender Abbildung dargestellt.

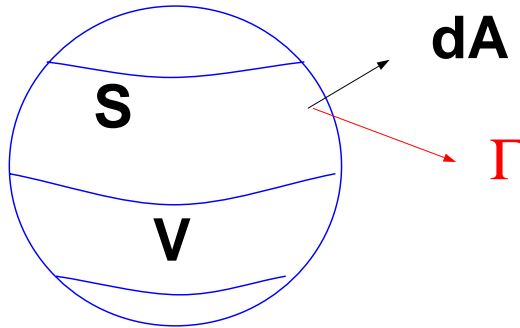


Abbildung 4.1: Geometrie zur Herleitung der Teilchentransportgleichung

Die Änderung der Teilchenzahl im Volumen ergibt sich dann aus dem Integral des Teilchenflusses  $\vec{\Gamma}$  über die Oberfläche sowie dem Volumenintegral über den sogenannten *Quellterm*  $S(\vec{r}, t)$ . Dieser beschreibt Änderungen der Teilchendichte, die nicht mit einem Fluss durch die Oberfläche verbunden sind, z. B. Teilchenzahländerung durch Ionisation, Rekombination oder auch Fusion. Man erhält

$$\frac{\partial N}{\partial t} = - \oint \vec{\Gamma} d\vec{A} + \int S dV$$

Mit der Definition der Teilchendichte  $n = dN/dV$  und dem Integralsatz von Gauss erhalten wir

$$\int \frac{\partial n}{\partial t} dV = - \int \nabla \cdot \vec{\Gamma} dV + \int S dV \quad \rightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\Gamma} + S$$

d. h. die Kontinuitätsgleichung für die Dichte.

Man kann nun verschiedene Ansätze für den Teilchenfluss machen. Ein Ansatz, der zwei unterschiedliche physikalische Phänomene berücksichtigt, ist

$$\vec{\Gamma} = -D\nabla n + n\vec{v}$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt einen Teilchenfluss aufgrund eines Dichtegradienten; wir haben es hier mit Diffusion zu tun. Der Teilchenfluss ist dem Gradienten entgegengerichtet, d. h. zeigt in die Richtung der niedrigeren Teilchendichte. Diffusive Prozesse gleichen Gradienten aus, für konstante Dichte verschwindet dieser Term. Dies kann man auch sehen, wenn man mit diesem Ansatz in die Kontinuitätsgleichung geht. Für den diffusiven Anteil erhält man dann

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$$

d. h. die Diffusionsgleichung, (auch als Wärmeleitungsgleichung bekannt), welche den diffusiven Transport beschreibt. Der zweite Term in der Kontinuitätsgleichung beschreibt Transport aufgrund einer Teilchenbewegung. Er ist auch ohne Gradienten wirksam. Eine solche Teilchenbewegung kann freies Strömen entlang von Magnetfeldlinien bedeuten oder Driften senkrecht zu einem Magnetfeld. Auf diese Art des Transportes werden wir im Weiteren nicht explizit eingehen.

Für den Energietransport lässt sich eine ähnliche Ableitung angeben.

## Diffusion

Im Bild der Einzelteilchen kann man die Diffusion in einem einfachen Ansatz aus der stochastischen Bewegung der Teilchen bei überlagertem Dichtegradienten verstehen. Diese beiden Effekte können einzeln diskutiert werden.

Wir beginnen mit einer stochastischen Bewegung der Teilchen. Bei einer solchen vollführt das Teilchen z. B. aufgrund seiner thermischen Energie in jedem Zeitintervall  $\Delta t$  einen Schritt der Schrittweite  $\Delta x$  in beliebige Richtung. Man spricht bei einem solchen Zufallsprozess auch von 'Random Walk'. Ein Beispiel hierfür ist die Brownsche Bewegung kleiner Partikel in einer Suspension. Im einfachsten Modell ist die Wahrscheinlichkeit, einen Schritt nach links ( $-\Delta x$ ) oder nach rechts ( $+\Delta x$ ) zu tun jeweils  $1/2$ . Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der nach  $N$  Zeitschritten zurückgelegten Strecke  $\delta$  entspricht damit der Wahrscheinlichkeit, bei  $N$ -maligem Münzwurf einen Überschuss eines bestimmten Ergebnisses (z. B. Wappen) zu erhalten. Die Wahrscheinlichkeit für  $k$ -maliges Auftreten eines Ereignisses bei  $N$ -maligem Münzwurf wird durch die Binomialverteilung beschrieben.

Die Binomialverteilung hat (für gleiche Wahrscheinlichkeit der beiden möglichen Ausgänge) den Mittelwert  $N/2$ , d. h. im Mittel werden ebenso viele Schritte in positive wie in negative Richtung ausgeführt. Das Teilchen führt somit keine gerichtete Bewegung aus. Die Standardabweichung der Verteilung wächst mit der Zahl der Zeitschritte:  $\sigma = 1/2\sqrt{N}$ . Daher beträgt nach der Zeit  $\tau = N\Delta t$  die mittlere Exkursion des Teilchens gerade  $\delta \sim \sqrt{N}\Delta x$ . Man erkennt, dass

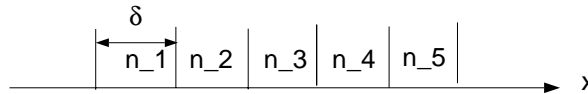
$$D = \frac{\delta^2}{\tau} \sim \frac{N\Delta x^2}{N\Delta t} = \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = \text{const.}$$

eine von  $N$  unabhängige Größe ist, welche die Ausbreitung des Teilchens beschreibt.  $D$  wird als Diffusionskoeffizient bezeichnet. Die Zeit  $\tau$ , nach der das Teilchen eine mittlere Exkursion von  $\delta$  um seinen Startpunkt ausgeführt hat, berechnet sich damit zu  $\tau = N\Delta t = (\delta^2/\Delta x^2)\Delta t = \delta^2/D$ . Damit liefert der Random Walk Ansatz eine Bewegung, welche keine gerichtete Komponente hat (d. h. Mittelwert Null), deren mittlere Exkursion aber mit

$$\tau = \delta^2/D$$

anwächst.

Diffusion erhalten wir nun, indem wir ein Ensemble von Teilchen mit einem Gradienten der Teilchendichte betrachten. Wir unterteilen das betrachtete Gebiet in Zellen der Länge  $\delta$ , in denen die Dichte jeweils konstant ist. Zwischen benachbarten Zellen kann die Dichte jedoch variieren.



Führen die Teilchen einer Zelle einen Random Walk aus, so gelangen sie dabei auch in die benachbarte Zelle. Der Fluss von Zelle 1 nach Zelle 2 ist dann durch

$$\vec{\Gamma}_{12} = n_1\delta/\tau$$

gegeben. Hierbei ist  $\tau$  die Ausbreitungszeit des Random Walk. Eine analoge Gleichung lässt sich für  $\vec{\Gamma}_{21}$  aufstellen. Somit lässt sich dann der Nettofluss durch die Trennwand zwischen Zelle 1 und Zelle 2 wie folgt ausdrücken:

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_{12} - \vec{\Gamma}_{21} = \frac{(n_1 - n_2)}{\delta}D$$

Im Grenzübergang  $\delta \rightarrow 0$  folgt daraus schließlich  $\vec{\Gamma} = -D\nabla n$ , d. h. der Diffusionsansatz. Ein Random Walk bei überlagertem Dichtegradienten liefert somit die Diffusion mit dem Diffusionskoeffizienten  $D = \Delta x^2/\Delta t$ . Unter Kenntnis der Stoßzeit  $\Delta t$  und der charakteristischen Versetzungslänge beim Stoß  $\Delta x$  kann so der Diffusionskoeffizient abgeschätzt werden. Für nichtmagnetisierte Plasmen (oder Bewegung parallel zu den Feldlinien) folgt:

$$D \propto \lambda^2 \cdot \nu \left[ \frac{m^2}{s} \right] = \frac{v_{th}^2}{\nu^2} \cdot \nu \rightarrow \frac{kT}{m \cdot \nu}$$

## Teilchen-Diffusion und Beweglichkeit

Zur Beschreibung der Teilchenbewegung wird von der Bewegungsgleichung ausgegangen:

$$n \cdot m \cdot \ddot{x} + n \cdot m \cdot \dot{x} \cdot \nu_{Sto\beta} + \nabla p = n \cdot q \cdot E$$

Beschleunigungsterm    Reibungsterm    Druckgradient    Kraft durch el. Feld

Für ein stationäres Plasma ohne (makroskopische) Beschleunigung folgt aus der vorstehenden Gleichung für den **Fluss**  $\Gamma_n$  von Teilchen der Sorte  $n$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_n = n \cdot \dot{x} = & -\frac{\nabla p}{m \cdot \nu} + \left(\frac{q}{m \cdot \nu}\right) \cdot n \cdot E \\ & - \left(\frac{kT}{m \cdot \nu}\right) \cdot \nabla n - \left(\frac{n}{m \cdot \nu}\right) \cdot \nabla kT \end{aligned}$$

Wir definieren:

$$\Gamma_n = -D_n \cdot \nabla n + \mu_n \cdot n \cdot E$$

Wir wollen jetzt weiter annehmen, dass der Term  $\nabla T$  vernachlässigbar ist gegenüber  $q \cdot E$  (dies ist in einem "Niedertemperaturplasma" der Fall, in dem die schweren Teilchen (Ionen) von den leichten Teilchen (Elektronen) über ein sich einstellendes E-Feld gegen den Reibungswiderstand (i. A. Stöße mit den Neutralteilchen) "herausgezogen" werden. Ein solches System soll jetzt betrachtet werden.

Für die zwei Transportkoeffizienten (jeweils für die Teilchensorte  $n$ ) ergibt sich somit:

$$\begin{array}{ll} D_n = \frac{kT_n}{m_n \cdot \nu_n} \left[ \frac{m^2}{s} \right] & \mu_n = \frac{|q_n|}{m_n \cdot \nu_n} \left[ \frac{m^2}{Vs} \right] \\ \text{Diffusionskoeffizient} & \text{Mobilitätskonstante} \end{array}$$

Wie man leicht erkennt, gilt zwischen  $D$  und  $\mu$  die "*Einsteinrelation*":

$$\frac{D}{\mu} = \frac{kT}{q}$$

Der Diffusionskoeffizient lässt sich (natürlich) auch auf die bekannte Form  $D \propto \lambda^2 \cdot \nu$  (= freies Transportwegstück<sup>2</sup> x Stoßfrequenz) zurückführen.

## Ambipolare Diffusion

Wie schon vorher angemerkt, werden die entgegengesetzt geladenen Teilchensorten des Plasmas nicht mit unterschiedlichen Flussraten aus dem System herausdiffundieren können - zumindest muss der Gesamtfluss an positiven und negativen Ladungen gleich sein (Quasineutralitätsbedingung). Im homogenen System wird die Flussgleichheit auch lokal gelten, was durch ein geeignetes internes ambipolares E-Feld erreicht werden muss:

$$\Gamma_e = -\mu_e \cdot n_e E - D_e \nabla n_e = \Gamma_i = \mu_i \cdot n_i E - D_i \nabla n_e$$

Nach E aufgelöst folgt:

$$E_a = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \cdot \frac{\nabla n}{n}$$

wobei:  $n_e = n_i = n$ , d. h. Quasineutralität vorausgesetzt ist.

$E_a$  in die Gleichung für den Ionenfluss eingesetzt ergibt:

$$\Gamma = -\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \cdot \nabla n \equiv -D_a \cdot \nabla n$$

Damit definiert die Gleichung den ambipolaren Diffusionskoeffizienten  $D_a$ :

$$D_a = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e}$$

Da  $\mu_e \gg \mu_i$  (vgl. Formel!), lässt sich in guter Näherung schreiben:

$$D_a \approx D_i + \frac{\mu_i}{\mu_e} \cdot D_e$$

Mit der Einsteinrelation folgt weiter:

$$D_a \approx D_i \cdot \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)$$

Im Ergebnis ist für den ambipolaren Fluss  $\Gamma$  bei den Ionen der Druckanteil ( $-D_i \nabla n$ ) klein gegen die Wirkung des Raumladungsfeldes:

$$\Gamma_i = \Gamma \approx \mu_i \cdot n \cdot E_a \longrightarrow \text{Elektronen ziehen Ionen heraus!}$$

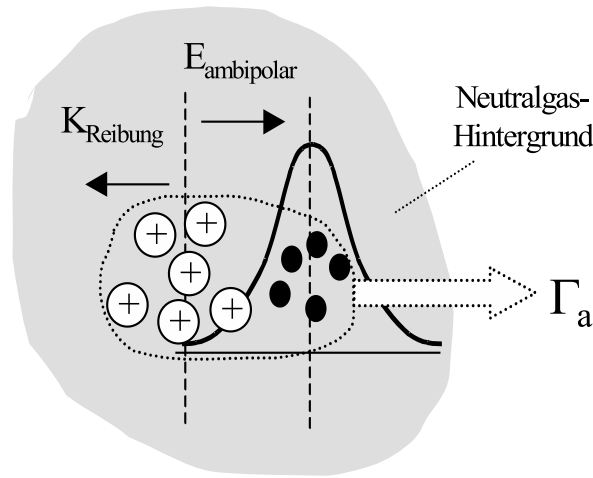
Umgekehrt ist bei den Elektronen deren Abfließen durch die Bremskraft der Ionen weitgehend reduziert, sodass:

$$\Gamma_e = \Gamma \approx -\mu_e \cdot n \cdot E_a - D_e \nabla n \approx 0$$

→ Ionen halten Elektronen zurück, der ungestörte Ausfluss  $D_e \nabla n$  ist wesentlich reduziert!  
Gemäß  $\Gamma_e \approx 0$  gilt nun:

$$\mu_e \cdot n \cdot E_a = -D_e \nabla n$$

Abbildung 4.2: Die Elektronen nehmen in dem Potential eine Boltzmannverteilung ein!



$$\nabla n/n = -E_a \cdot \mu_e/D_e = -eE_a/kT$$

sodass:

$$n_e = n_{e0} \cdot e^{-\int e \cdot E_a(\chi) \cdot d\chi/kT}$$

Zum Stichwort “Diffusion” ist aber noch nachzutragen: Ein Transportvorgang ist (selbstverständlich) nur dann “diffusiv”, wenn die charakteristische Schrittweite (= freie Weglänge  $\lambda$ ) sehr viel kleiner bleibt als die Transportstrecke  $L$  (= Systemgröße), wenn also gilt:

$$L_{System} \gg \lambda_{e,i} = \text{Voraussetzung für Diffusion!}$$

## “Freier Fall”, Ionenschallströmung

Falls das Plasma - im Gegensatz zum Diffusionsfall - aber hinreichend stoßfrei ist, also die obige Relation verletzt ist, liegt der sogenannte Frei-Fall vor. Jetzt werden die Ionen von den Elektronen (über das Raumladungsfeld) auf deren Energie gebracht und als gemeinsame Ausflussgeschwindigkeit für das somit verkoppelte Elektron-Ionenensemble ergibt sich die *Ionenschallgeschwindigkeit*  $c_s$ :

$$v_{aus} = \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}} = c_s$$

Dies ist die effektive Ausflussgeschwindigkeit, wenn keine Reibung bzw. Diffusion vorliegt! (“Stoßfreier Fall”).

## Wärmeleitung

Wärme ist eine weitere, wichtige Transportgröße in einem Plasma. Dabei folgt der Wärmetransport den gleichen Gesetzen wie der Teilchentransport, nämlich:



$$q_n = -\kappa_n \cdot \nabla T_n \left[ \frac{1}{m \cdot s} \cdot \frac{W s}{m} \right]$$

$q_n$ : Wärmefluss, getragen durch die Teilchensorte n

Vielfach wird statt des globalen Wärmeleitwerts  $\kappa$  auch der Wärmeleitkoeffizient pro Teilchen ( $\chi$ ) angegeben:

$$\chi \equiv \frac{\kappa}{n} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

Der Wärmeleitkoeffizient  $\chi$  hat also die gleiche Dimension wie der Diffusionskoeffizient  $D$  und ist in gleicher Weise  $\propto \lambda^2 \cdot \nu$  (vgl. "Diffusion").

Im Gegensatz zum Teilchentransport, der immer ambipolar erfolgen muss (d. h. keine unterschiedlichen Flüsse von Ionen und Elektronen sind erlaubt), kann der Wärmefluss über Ionen und Elektronenkanal sehr unterschiedlich ausfallen. In einem Niedertemperaturplasma ist - wenn überhaupt - nur der von den Elektronen getragene Wärmestrom von Bedeutung. In einem vollionisierten Plasma höherer Temperatur kann (wiederum) die Elektronenwärmeleitung erhebliche Werte annehmen. Die Elektron-Elektron-Stoßfrequenz  $\nu_{ee}$  für  $\nu$  eingesetzt (d. h. nur Coulombstöße maßgebend!), ergibt:

$$\chi_e = \frac{v_{the}^2}{\nu_{ee}} = C_e \cdot \frac{(kT_e)^{5/2}}{n_e}$$

Bei Temperaturen oberhalb einiger 10 eV folgen bereits hohe und mit starker Potenz mit der Temperatur ( $\propto T^{5/2}$ !) ansteigende Werte der Wärmeleitung.

Für Ionen gilt die analoge Formel, es ist nur "e" durch "i" zu ersetzen. Wie man leicht erkennt, reduziert sich die Ionenwärmeleitung im Verhältnis:

$$C_i/C_e = \sqrt{m_e/m_i} \cdot Z^2$$

(für Z-fach geladene Ionen)

Dabei ist zu beachten, dass hier die Wärmeleitung ohne bzw. parallel zu einem Magnetfeld zu verstehen ist. Gleichzeitig muss wiederum geprüft werden, ob die Bedingung hinreichend kleiner freier Weglänge gegeben ist ( $L_{System} \gg \lambda_{ee}; \lambda_{ii}$ ).

## Elektrischer Widerstand eines Plasmas (Spitzer-Formel)

Auch der elektrische Strom ist eine Transportgröße, die über einen entsprechenden Koeffizienten mit einem antreibenden elektrischen Feld verknüpft ist, das nunmehr von außen an das System angelegt sein soll. Unter Annahme einer linearen Beziehung zwischen  $E$  und  $j$  erhalten wir das Ohmsche Gesetz:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad \text{bzw.} \quad \vec{j} = \frac{\vec{E}}{\eta}$$

wobei  $\sigma$  die skalare elektrische Leitfähigkeit bzw.  $\eta$  den spezifischen elektrischen ("ohmschen") Widerstand angibt. Die elektrische Leitfähigkeit ist unmittelbar mit der Beweglichkeit verknüpft. Dazu schreiben wir:

$$j = -e \cdot n_e \cdot \nu = -e \cdot \Gamma = -e \cdot n_e \cdot \mu \cdot E$$

Damit folgt:

$$j = \left( \frac{e^2}{m_e} \cdot \frac{n_e}{\nu} \right) \cdot E$$

Mit der Definitionsgleichung für die Leitfähigkeit bzw. den ohmschen Widerstand (s. o.) ergibt sich weiter:

$$\eta_{\parallel} = \frac{m_e}{n_e \cdot e^2} \cdot \nu_{sto\beta}$$

(der Index  $\parallel$  soll bedeuten, dass der Widerstand parallel zu einem möglichen Magnetfeld betrachtet werden soll, mit B-Feld ergibt sich eine andere Situation.

Geht man von einem weitgehend ionisierten Plasma aus, so ist für  $\nu$  die Coulomb-Stoßfrequenz  $\nu_{ei}$  in den obigen Ausdruck einzusetzen. Dies führt auf die bekannte **Spitzerformel**:

$$\begin{aligned} \eta_{\parallel} &= K \cdot \left[ \frac{m_e^{1/2} \cdot e^{1/2}}{\epsilon_0^2} \right] \cdot \ln \Lambda \cdot \frac{Z}{T_e^{3/2}} \\ &\approx 0,52 \cdot 10^{-5} \cdot \ln \Lambda \cdot \frac{Z}{T_e^{3/2}} [\Omega \cdot m] \end{aligned}$$

$T_e$  ist hier in eV einzusetzen!

Wegen der großen Wirkung der Fernstöße ("Korrektur"  $> \times 100$ ) ergibt sich der richtige Wert für  $\eta$  erst über eine genauere kinetische Rechnung (vgl. *Spitzer, L. and Härm, R., Phys. Rev., 89, 977 (1953)*).

Mit der Spitzerformel ergeben sich für das Plasma sehr geringe Widerstandswerte bei höheren Temperaturen. So erreicht ein Wasserstoffplasma ( $Z=1$ ) bei ca. 1 keV ( $\sim 10$  Mio $^\circ$ ) den spezifischen Widerstand von Kupfer ( $= 1,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ ) und dieser fällt mit steigender Temperatur entsprechend  $T_e^{-3/2}$  noch weiter ab (Fusionsplasma!).

Für ein Plasma mit wesentlich nur Coulomb-Stößen gilt also (gemäß Spitzer-Formel):

- Der Plasmawiderstand ist praktisch von der Elektronendichte unabhängig
- Er fällt stark mit der Elektronentemperatur ( $\propto T_e^{-3/2}$ ) ab

Aus der Ausgangsformel geht aber schon hervor, dass der Spitzerwiderstand dann u. U. erheblich zu korrigieren ist, wenn das Plasma nur teilionisiert ist und daher die Elektron- Neutralteilchenstöße mit zu berücksichtigen sind. In diesem Fall ist die entsprechende Stoßfrequenz der Cb-Stoßfrequenz hinzu zu addieren. Dementsprechend folgt:

$$\eta_{Neutralgas} = \frac{m_e}{n_e \cdot e^2} \cdot (\nu_{ei} + \nu_{en})$$

Bei sehr schwacher Ionisation (Niedertemperaturplasma) werden die Stöße mit den Neutralteilchen sogar dominieren, sodass gilt:  $\eta \propto \nu_{en}/n_e$ . In diesem Fall (d. h. für  $\nu_{en} \gg \nu_{ei}$ ) ist die

Leitfähigkeit nun nicht mehr unabhängig von der Elektronendichte, sondern steigt mit  $n_e$  an.

An dieser Stelle sei bereits angemerkt, dass die Leitfähigkeit (bzw. der spez. Widerstand) in einem magnetisierten Plasma völlig anders beschrieben werden muss. Insbesondere liegt jetzt kein skalarer Zusammenhang zwischen  $E$  und  $j$  vor, die Leitfähigkeit muss vielmehr als Tensor beschrieben werden. Stehen  $E$ - und  $B$ -Feld senkrecht aufeinander, kann der Strom in  $E$ -Richtung stark behindert sein. Dafür fließt jetzt ein stärkerer Strom in die "dritte Richtung", also senkrecht zu  $E$  und  $B$ . Liegt aber ein Druckgradient (senkrecht zu  $B$ ) vor, ändern sich die Dinge noch einmal. Jetzt folgt wieder ein hoher Stromfluss in  $E$ -Richtung (in etwa mit der Spitzer-Leitfähigkeit!).

### Zusammenfassung: Diffusion und Transport

"Langsam" ablaufende Transporterscheinungen (Energie-, Teilchenflüsse) folgen aus Bewegungsgleichung unter Vernachlässigung des Beschleunigungsterms (d. h. es bleibt  $n \cdot m \cdot v \cdot \nu_{\text{stoß}} + \nabla p = n \cdot q \cdot E$ ).

Aus  $\Gamma$  (Fluss)  $\equiv n \cdot v = -D \nabla n + \mu \cdot n \cdot E$  folgen **Diffusionskoeffizient  $D$**  ( $= kT / (m \cdot \nu_{\text{stoß}})$ ) und **Beweglichkeit  $\mu$**  ( $= q / m \cdot \nu_{\text{stoß}}$ ). (Man sieht zugleich, dass  $D = \lambda^2 \cdot \nu_{\text{stoß}}$ ).

Wegen  $\Gamma_e = \Gamma_i$  folgt ambipolare Diffusion (Elektronen "ziehen" Ionen über Raumladungsfeld). Dies kann in einen gemeinsamen **ambipolaren Diffusionskoeffizienten** umformuliert werden:  $D_a = (\mu_i D_e + \mu_e D_i) / (\mu_i + \mu_e)$ ; wobei  $\mu_e \gg \mu_i$ .

Wärmeleitung (WL) folgt analog zur Teilchendiffusion:  $q_n = -\kappa_n \cdot \nabla T_n =$  Wärmestrom, getragen von der Sorte  $n$ ;  $\kappa_n =$  WL-Koeffizient (WL-Koeffizient häufig auch pro Teilchen genommen:  $\chi_n = \kappa_n / n$ ).  $\chi$  äquivalente Größe zu  $D$  (gleiche Dimension!), d. h. wieder:  $\chi = \lambda^2 \cdot \nu_{\text{stoß}}$ . Für **Coulomb-Stöße** ( $\nu_{\text{stoß}} = \nu_{ee}$ ) folgt starke Zunahme der WL mit der Temperatur ( $\chi_e \propto T_e^{5/2} / n_e$ ).

Transportgröße "elektrische Leitfähigkeit" folgt entsprechend  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  über  $j = -en_e v = -e \Gamma_e$  (und  $\Gamma_e = n_e \mu_e E$ ). Für magnetfeldfreies Plasma (bzw.  $\parallel$  zum Magnetfeld) folgt der **Spitzer-Widerstand**  $\eta = 1/\sigma = (m_e/e^2) \cdot \nu_{ei}/n_e$  bzw.  $\eta \propto T_e^{-3/2}$  wenn Cb-Stöße dominieren. Also: starker Abfall des Widerstandes mit der Elektronentemperatur, (praktisch) kein Einfluss der Dichte (hebt sich raus). Bei schwacher Ionisation (Niedertemperaturplasma) ist Elektron-Neutralteilchenstoßfrequenz mitzubersichtigen (siehe  $\eta$ -Formel).



# Kapitel 5

## Plasmarandschicht

(Labor-)Plasmen sind notwendigerweise von materiellen Wänden umgeben, mit denen das Plasma in Wechselwirkung tritt. Dieser Plasma-Festkörper-Übergang ist von großer Bedeutung, sowohl für das lokale Plasmaverhalten (Plasmarandschicht), wie auch für die Festkörperoberfläche (Materialerosion oder -deposition oder auch Oberflächenmodifikation). Der Plasma-Festkörper-Übergang ist zugleich Grundlage für die wichtigen Anwendungen in der Oberflächen- und Dünnschichttechnologie. Auf dem Gebiet der Fusionsforschung stellt die Plasmawandwechselwirkung ein größeres Problem dar (Wärmebelastung, Wanderosion). Auf dem Randschichtverhalten baut auch ein wichtiges Plasmadiagnostikverfahren auf: die Langmuirsonde zur Messung von Plasmadichte und Elektronentemperatur bzw. Elektronenenergieverteilung.

### Plasma-Wand-Übergang

Zur (zunächst) qualitativen Beschreibung des Plasma-Wand-Übergangs (“Wand” = Festkörper, u. U. aber auch Flüssigkeit) dient nachfolgendes Bild:

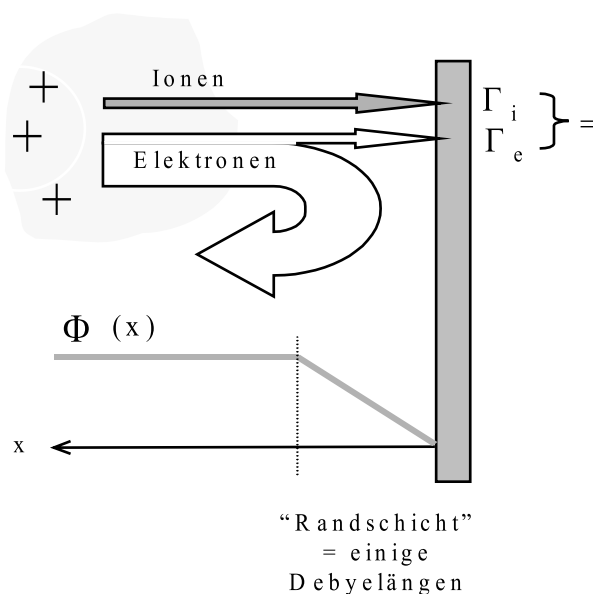


Abbildung 5.1: Zur qualitativen Beschreibung der Plasmarandschicht.

Das Schemabild ist wie folgt zu interpretieren: Aufgrund ihrer viel höheren Geschwindigkeit ( $(m_i/m_e)^{1/2}$  bei gleicher Temperatur) würde sich ein sehr viel höherer Elektronenfluss auf den Festkörper einstellen. Das Plasma muss aber quasineutral bleiben, was dadurch erreicht wird, dass sich das Plasma soweit positiv auflädt, bis nur noch entsprechend wenige, sehr schnelle Elektronen das Potential überwinden können. In der Randschicht selbst gilt die Quasineutralität nicht mehr, d. h. die Randschichtabmessung muss von der Dimension "Debye-Länge" sein. Ionen die in diesen Randbereich eintreten, werden ihrerseits entsprechend dem Randpotential beschleunigt und auf den Festkörper geschossen. Im Detail ist die Wechselwirkung zwischen Plasma und Wand allerdings komplexer:

Treffen Ionen auf die leitfähige Wand, werden sie dort meist neutralisiert und kehren (mit unterschiedlichen Energien) ins Plasma zurück. Dort wechselwirken sie mit dem Plasma, werden ionisiert durch Stöße mit den Elektronen oder durch Ladungsaustauschstöße. Die entsprechenden charakteristischen Längen für diese Prozesse (zusätzlich Debye-Länge  $\lambda_D$  und Elektronenstoßlänge  $\lambda_{ee}$ ) sind im Folgenden zusammengefasst (für ein Wasserstoffplasma mit  $n_e = n_i = 10^{19} m^{-3}$  und  $T_e = T_i = 10 eV$ )

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 T_e}{n_e e^2}} \approx 10^{-5} m$$

$$\lambda_{CX} = \frac{v_0}{\langle \sigma_{CX} g_{oi} \rangle n_i} \approx \frac{v_0}{5 \cdot 10^{-19} \cdot v_{i,th} n_i} \approx 0,01 m$$

$$\lambda_{ion} = \frac{v_0}{\langle \sigma_{ion} v_e \rangle n_e} \approx \frac{v_0}{10^{-14} \cdot n_e} \approx 0,025 m$$

$$\lambda_{ee} \approx 10^{16} T [eV]^2 / n \approx 0,1 m$$

Daraus wird deutlich, dass die Debye-Länge viel kleiner ist als alle Stoßlängen. Man kann den Plasmarand also unterteilen in 3 Bereiche: in der dünnen Debye-Schicht kann die Quasineutralität verletzt werden. Außerhalb gibt es eine quasineutrale Schicht, in der die Teilchen kaum miteinander wechselwirken und also frei auf die Wand strömen (im Bereich  $x < x_s$  in Abbildung 5.2).

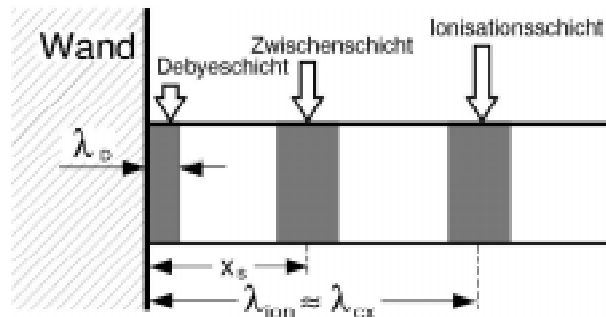


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung der relevanten Abmessungen am Plasmarand.

Im Bereich vor der Wand haben wir es also nicht mit einer Maxwell-Verteilung zu tun. Diese stellt sich erst für größere Abstände von der Wand ein. Im Folgenden wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass sich am Ort der Zwischenschicht die Verhältnisse diskontinuierlich

ändern würden. Wir nehmen an, dass für  $x < x_s$  Stöße vollständig vernachlässigt werden könnten, während sich für  $x > x_s$  eine Maxwell-Verteilung einstellt. In der Debye-Schicht tritt Ladungstrennung auf, weil (wie oben beschrieben) dort wegen der größeren Elektronenbeweglichkeit elektrische Felder entstehen. Die lokalen Dichteverteilungen für Elektronen und Ionen folgen daher aus der Poisson-Gleichung. Wir wollen zunächst die Elektronenverteilung in der Randschicht betrachten. Wie oben schon diskutiert, brauchen wir Stöße nicht zu betrachten in den Bereichen, in denen es ein endliches elektrisches Feld gibt ( $\lambda_D \ll \lambda_{ee}$ ). Da wir (wegen der erst später zu diskutierenden Dichteverteilung der Ionen) das Wandpotential nicht kennen, wollen wir die Elektronenverteilungsfunktion zunächst für beliebiges Wandpotential  $\phi(x)$  bestimmen. Wir nehmen an, dass wir am Ort  $x = x_s$  eine Maxwell-Verteilung vorliegen haben für Elektronen, die auf die Wand zufliegen  $w_x \leq 0$  (hier ist  $w_x$  die Geschwindigkeitskomponente der Elektronen senkrecht zur Wand). Im Bereich  $x < x_s$  muss die Verteilungsfunktion folgende Randbedingungen berücksichtigen:

- direkt an der Wand ( $x = 0$ ) gibt es keine Elektronen, die von dort wegfliegen (Elektronen mit ausreichender Energie, um das negative Wandpotential zu überwinden, treffen auf die Wand, Sekundärelektronenemission soll vernachlässigt werden).
- Elektronen, die es nicht bis zur Wand schaffen, werden im abstoßenden Wandpotential reflektiert und erreichen auf dem Weg zurück ihre ursprüngliche Energie wieder. Am Ort  $x = x_s$  ( $\phi = 0$ ) ist die Verteilung also wieder eine Maxwell-Verteilung, für ( $x < x_s$ ) “fehlen” die schnellen Elektronen in der Verteilungsfunktion.

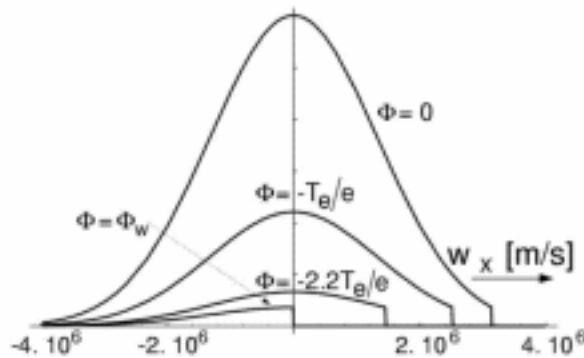
Die Verteilungsfunktion, die die oben beschriebenen Randbedingungen erfüllt, ist:

$$f_e(x, w_x < w_x^*) = \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{1/2} n_s \exp \left[ - \left( m_e w_x^2 / 2 - e\Phi(x) \right) / k_B T_e \right]$$

$$f_e(x, w_x \geq w_x^*) = 0 \quad w_x^* = \sqrt{\frac{2e}{m_e} (\Phi(x) - \Phi_w)}$$

( $\phi_w$  ist das Potential an der Wand,  $\phi_w < 0$ ). Sie ist in Abbildung 5.3 für verschiedene Werte des Potentials (das hier im Prinzip die Rolle einer Ortsvariable hat) dargestellt.

Abbildung 5.3: Geschwindigkeitsverteilung für die Elektronen in der Nähe der Wand für verschiedene Wandpotentiale  $\phi$ .  $w_x < 0$  bedeutet Bewegung auf die Wand zu.



Die lokale Elektronendichte (als Funktion des noch unbekanntes Potentials) erhält man aus der Integration der Verteilungsfunktion über alle Geschwindigkeiten  $w_x$ . Man findet:

$$n_e(\Phi) = \underbrace{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt \right)}_{=\nu(y)} e^{e\Phi/k_B T_e} \quad y(\Phi) = \sqrt{e(\Phi - \Phi_w)/k_B T_e}$$

Der erste Term resultiert aus der Integration über negative Geschwindigkeiten (Bewegung auf die Wand zu). Für positive  $w_x$  ist zu beachten, dass die sehr schnellen Elektronen die Wand erreicht haben. Daher ist die Elektronendichte auch kleiner als man aus der Debye-Theorie bei gegebenem Potential  $\phi$  ( $n(\phi) = n(\phi=0) \exp(-e\phi/k_B T)$ ) erwarten würde. Der Korrekturfaktor zur Debye-Theorie ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Nahe an der Wand reduziert sich durch diesen Effekt die Elektronendichte um einen Faktor 2 ( $y \approx 1$ ).

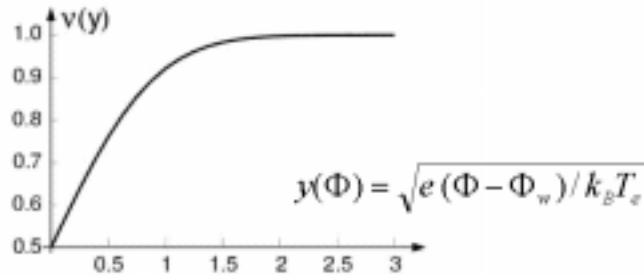


Abbildung 5.4: Korrekturfaktor zum Debye-Potential ( $\nu(y) = 1$  entspricht Debye-Potential)

Um die Elektronendichte zu bestimmen, muss das Potential  $\phi$  bekannt sein. Das wollen wir nun aus der Behandlung der Ionen in der Randschicht bestimmen. Dazu müssen wir die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi = e(n_e - n_i)/\epsilon_0$$

lösen.

Am Ort  $x = x_s$  können wir Quasineutralität annehmen (wegen  $x_s > \lambda_D$ ). Wenn wir weiterhin davon ausgehen, dass kein Strom zwischen Plasma und Wand fließt, muss in Richtung auf die Wand (für  $Z = 1$ )  $v_e \approx v_i$  sein. Der Einfachheit halber nehmen wir weiter an, dass die Ionen kalt sind ( $T_i = 0$ ). (Diese Annahme ist oft nicht gerechtfertigt, wir werden das aber später noch diskutieren). Da Stöße vernachlässigbar sind, spielen weder Ionenwärmeleitung noch Wärmeübertragung von den Elektronen eine Rolle. Man kann daher aus der Energieerhaltung

$$\frac{m_i}{2} v_i^2 = \frac{m_i}{2} v_s^2 - e\phi$$



( $v_s$ : Ionengeschwindigkeit am Ort  $x_s$ ) die Ionengeschwindigkeit erhalten:

$$v_i^2 = v_s^2 - 2e\Phi/m_i$$

Außerdem folgt damit und aus der Stationaritätsbedingung  $n_s v_s = n_i v_i$

$$n_i = \frac{n_s v_s}{\sqrt{v_s^2 - 2e\Phi/m_i}}$$

Setzen wir nun die vorher berechnete Elektronendichte und dieses Ergebnis in die Poisson-Gleichung ein, finden wir:

$$\varepsilon_0 \Phi''(x) = -en_s \left\{ \frac{v_s}{\sqrt{v_s^2 - 2e\Phi(x)/m_i}} - \nu[y(\Phi(x))] e^{e\Phi(x)/k_B T_e} \right\}$$

Um eine analytische Lösung dieser Gleichung zu finden, betrachten wir zunächst nur die Umgebung von  $x_s$ . Dort ist die Ladungstrennung noch klein. Daher kann man die Funktion  $\nu(y)$  näherungsweise 1 setzen und wegen  $e\phi \ll k_B T$  und  $e\phi \ll m_i v_s^2$  die entsprechenden Ausdrücke linearisieren. Damit findet man eine vereinfachte Differentialgleichung:

$$\Phi''(x) = \frac{e^2 n_s}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{k_B T_e} - \frac{1}{m_i v_s^2} \right) \Phi(x)$$

Das ist eine Differentialgleichung der Form  $\phi'' = \alpha\phi$  mit der Lösung  $\phi = \phi_0 e^{\sqrt{\alpha}x}$ . Da die Randbedingung fordert, dass das Potential mit  $x$  monoton steigen soll (für  $x < x_s$ ), muss  $\alpha \geq 0$ , d. h.  $\frac{1}{k_B T} \geq \frac{1}{m_i v_s^2}$  erfüllt sein.

Daraus erhält man die sogenannte Bohm-Bedingung:

$$v_s \geq \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} = c_s$$

Aus der Ionisationsschicht müssen die Ionen mindestens mit Schallgeschwindigkeit ausströmen. Mit diesem Ergebnis können wir nun das Potential  $\phi(x)$  berechnen. Wir setzen die Geschwindigkeit der Ionen gleich der Schallgeschwindigkeit. Im stationären Fall sind die Elektronenflüsse an  $x_s$  und auf die Wand identisch. Mit  $v_e \approx v_i = c_s$  und der Verteilungsfunktion für die Elektronengeschwindigkeit findet man:

$$\int_{-\infty}^0 w_x f_e(0, w_x) dw_x = n_s e^{e\Phi_w/k_B T_e} \sqrt{\frac{k_B T_e}{2\pi m_e}} = n_s c_s$$

Daraus folgt für das Wandpotential

$$e\Phi_w = k_B T_e \ln \left( \sqrt{\frac{2\pi m_e}{k_B T_e}} c_s \right) = k_B T_e \ln \sqrt{2\pi \frac{m_e}{m_i}}$$

Unter der Annahme kalter Ionen und  $v_i = c_s$  findet man also

$$e\Phi_w (T_{i,s} = 0) = -2,84 k_B T_e$$

Ohne Rechnung: mit  $T_e = T_i$  an  $x = x_s$  findet man:

$$e\Phi_w (T_{i,s} = T_e) = -2,15 k_B T_e$$

Den gesamten Potentialverlauf  $\phi(x)$  kann man natürlich nur erhalten, wenn man auf die oben verwendete Linearisierung verzichtet. Dann erhält man den in Abbildung 5.5 gezeigten Potentialverlauf:

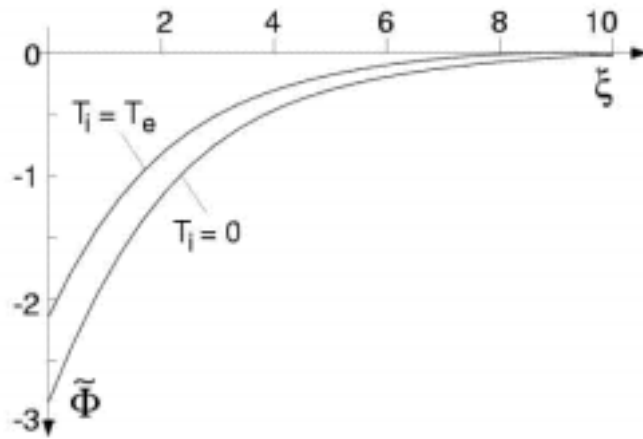


Abbildung 5.5: Potentialverlauf für kalte Ionen und ein thermisches Plasma ( $T_e = T_i$ ).

Eine schematische Darstellung der Verhältnisse in der Randschicht gibt Abbildung 5.6.

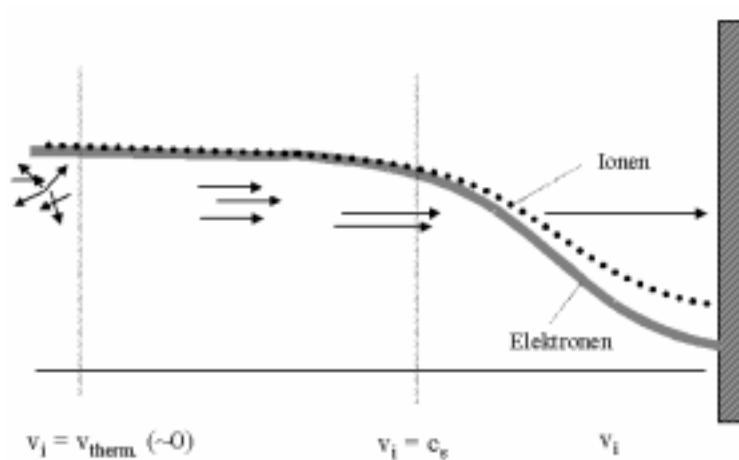


Abbildung 5.6: Schemabild Plasma → Festkörperübergang

# Langmuirsonde

Die Randschichtphysik liefert auch die wesentliche Grundlage für die Messung von Plasmadichte und Elektronentemperatur mit Hilfe der Langmuir-Sonde. Das Prinzipbild 7 erläutert diese wichtige Plasmadiagnostik-Methode.

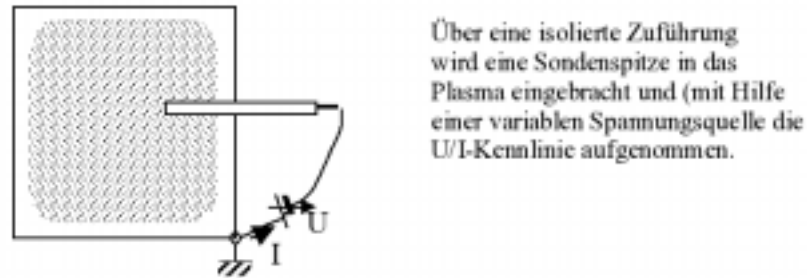


Abbildung 5.7: Schematische Darstellung der Wirkungsweise einer Langmuir-Sonde

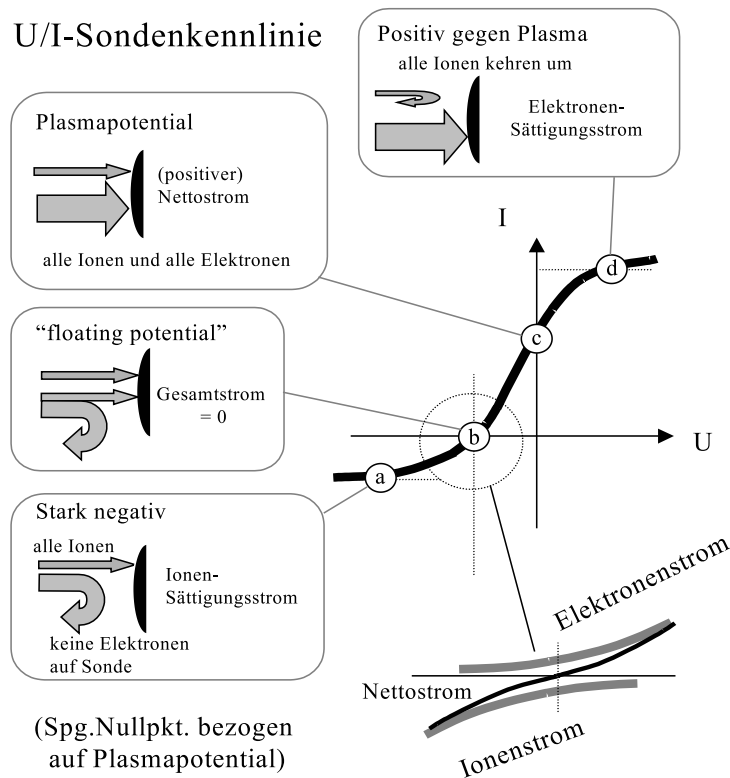


Abbildung 5.8: Kennlinie einer Langmuir-Sonde

Hierbei findet man das in Abbildung 5.8 dargestellte Ergebnis. Es wird eine ‘Dioden-ähnliche’ Kennlinie durchlaufen, die in einen Elektronen-bzw. Ionensättigungsbereich ausläuft (das Verhältnis der Sättigungsströme beträgt ca.  $(m_i/m_e)^{1/2}$ , d. h. die Abbildung ist in diesem Punkt nicht maßstäblich!). Zur Erläuterung beginnen wir am Punkt (a) der Kennlinie. Hier liegt eine so große negative Spannung an, dass alle Elektronen zurückgeworfen werden, aber umgekehrt alle verfügbaren Ionen aufgesammelt werden. Wir erhalten den (negativen!) Ionensättigungsstrom  $I_{is}$ , der gegeben ist durch:

$$I_{is} \approx -F \cdot e \cdot n_i \cdot \bar{v}_i / 4$$

$F$  ist die Sondenfläche,  $n_i (= n_e)$  die lokale Plasmadichte und  $\bar{v}_i$  die mittlere Ionengeschwindigkeit.

Dabei ist aber zu beachten, dass die effektive Sondenfläche  $F$  durch die sich um die Sonde ausbildende Randschicht mitbestimmt wird. Dazu setzen wir voraus, dass  $F \gg s^2$  ( $s$  = Schichtdicke). Wir betrachten weiterhin den Fall kalter Ionen ( $T_i \ll T_e$ ). Dementsprechend strömen die Ionen mit der Ionenschallgeschwindigkeit  $c_s = (k_B T_e / M)^{1/2}$  in die Randschicht ein (Bohm-Kriterium!). Die Abbildung 5.9 veranschaulicht diese Situation:

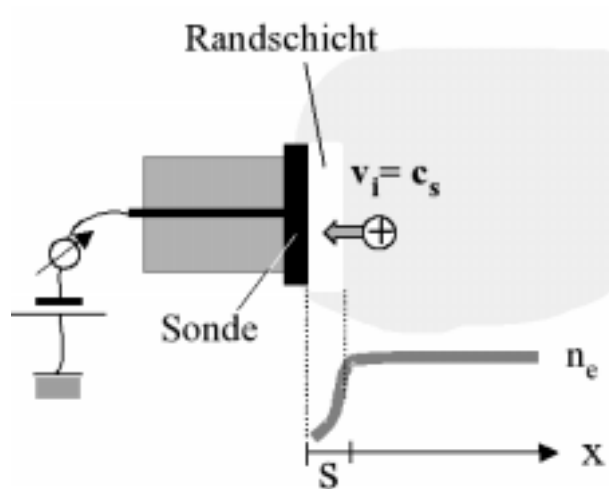


Abbildung 5.9: Plasmabedingungen in der Nähe einer Langmuir-Sonde

Die Messung des Ionensättigungsstromes gibt also bereits die Plasmadichte, wobei nur noch die (mit der Wurzel) eingehende Elektronentemperatur bekannt sein muss.

Verringert man nun die negative Sondenspannung, so werden zunehmend Elektronen gegen den noch verbleibenden Potentialberg anlaufen können. Bei einem bestimmten Zwischenwert treffen gleich viele Ionen und Elektronen auf die Sonde und der Gesamtstrom wird Null (Punkt (b) der Kennlinie). Dieser Spannungswert entspricht damit zugleich auch dem "floating" Potential, d. h. einer Sonde ohne elektrischen Anschluss bzw. mit Anschluss an ein ideales Voltmeter ( $R_i = \infty$ , d. h. Strom = 0). Bei Übergang zur Spannung = 0 (bezogen auf den Plasmakörper!) erreichen alle Ionen und Elektronen die Sonde (Plasmapotential, Punkt c)). Bei weiterer Spannungserhöhung verschwinden die Ionen und schließlich wird der Elektronensättigungsstrom erreicht (Punkt (d)). Dabei ist zu beachten, dass in Wirklichkeit keine echte Sättigung erreicht wird, d. h. der Strom wächst mit schwächerer Steigung immer weiter an. Der Grund: Die Schichtkante  $s$  verschiebt sich immer weiter in das Plasma hinein, d. h. die effektive "Sondeneroberfläche" wird immer größer (erfordert verfeinerte Theorie!).

Für die  $U/I$ -Kennlinie findet man:

$$I = I_e + I_i = I_{es} \cdot \exp \left[ \frac{-e(\Phi_p - U)}{k_B T_e} \right] + I_i \quad (I_i < 0)!$$

Die in der vorstehenden Formel enthaltene Größe  $\Phi_p$  gibt das Plasmapotential an, d. h. das Potential, das das Plasma gegenüber der (geerdeten) Gefäßwand einnimmt.

Der Elektronensättigungsstrom wiederum lässt sich - analog zu den Ionen - darstellen als:

$$I_{es} \approx F \cdot e \cdot n_e \cdot \bar{v}_e / 4$$

wobei:

$$\bar{v}_e = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}}$$

Mit der Formel erhält man sofort auch die “floating”-Bedingung bzw. die Größe  $U_{float}$  gemäß:

$$I = 0 = I_{es} \cdot \exp\left[\frac{-e(\Phi_p - U_{float})}{k_B T_e}\right] + I_i$$

Nach Logarithmieren der Kennlinienformel folgt schließlich noch die Elektronentemperatur zu:

$$T_e = (U - \Phi_p) / \ln(I/I_{es}) \quad (\text{in Volt})$$

Hierbei ist der exponentielle Stromanstiegsbereich zwischen Ionen- und Elektronenstromsättigung zu betrachten.

Für den Fall, dass keine Maxwell-Verteilung vorliegt (bisher vorausgesetzt!), ist die logarithmierte Kennlinie keine Gerade mehr! In diesem Fall muss der gegen das rücktreibende Potential anlaufende Elektronenstrom mit der Verteilungsfunktion  $f(v_x)$  berechnet werden:

$$I_e = F \cdot e \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x \cdot dv_y \cdot \int_{v_z}^{+\infty} v_z \cdot f_e(v_z) \cdot dv_z$$

mit:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2e(\Phi_p - U)}{m_e}}$$

Es lässt sich dann weiter zeigen, dass die zweite Ableitung ( $d^2 I / dU^2$ ) unmittelbar auf die (nicht-maxwellsche) Energieverteilung der Elektronen führt!

*(Da bei der Elektronen-Energie-Verteilungsfunktion die 2. Ableitung gebildet werden muss, ist diese Messung naturgemäß diffiziler. Dennoch gelingt es, die Verteilungsfunktion über 3-4 Größenordnungen zu verfolgen und gegebenenfalls Abweichungen von der Maxwell-Verteilung mit entsprechender Genauigkeit festzustellen)*

Damit liefert die Langmuirsonde folgende wichtige Plasmakenngrößen:

- **Elektronendichte** aus dem Elektronen<sup>1</sup> - bzw. Ionensättigungsstrom
- **Elektronentemperatur** aus der 1. Ableitung der logarithmierten Kennlinie im Bereich des Strom-Nulldurchgangs
- **Energieverteilungsfunktion** der Elektronen (EEVF) aus der Krümmung der Kennlinie (2. Ableitung)

---

<sup>1</sup>In der Praxis ist der Elektronensättigungsstrom kaum brauchbar, da er so hohe Werte annimmt, dass das Plasma bereits lokal verändert ist. Auch ist es oft schwierig, den Übergang in die “Sättigungssteigung” zu erkennen. Deswegen wird für die Dichtebestimmung besser der Ionensättigungsstrom herangezogen.

### Zusammenfassung: Plasmarandschicht

Elektronen sind viel schneller als Ionen (bei gleicher Energie, Temperatur um "Wurzel Massenverhältnis", d. h. typ.  $O(100)$ ). Damit Elektronen und Ionen das Plasma in gleicher Zahl verlassen, muss sich das Plasma positiv aufladen, nur die "schnelleren Elektronen kommen raus". Als Bedingung für ambipolaren Teilchenausfluss folgt (für Maxwell-Verteilung):  $\Phi \approx T_e(\text{Volt}) \cdot \ln(m_i/m_e)^{1/2} \approx 3.4 \times T_e$ . Der Potentialsprung konzentriert sich dabei auf einen kleinen Randbereich der Größenordnung "Debye-Länge" (vgl. Kap. 1). In dieser Randzone (typ.  $\ll \text{mm}$ ) werden die Ionen ihrerseits auf die Wand entsprechend  $\Phi$  beschleunigt. Damit an der Schichtkante keine Diskontinuität entsteht (Ionenverarmung), stellt sich noch eine "Vorschicht" ( $10 \dots 100 \times \lambda_{\text{Debye}}$ ) ein, in der die Ionen auf (Ionen-)Schallgeschwindigkeit  $c_s = (kT_e/m_i)^{1/2}$  vorbeschleunigt werden müssen ("Bohmsches Schichtkriterium").

Randschichtphysik führt auf "Langmuir-Charakteristik" (=  $I/U$ -Kennlinie einer eingebrachten, sehr kleinen (Langmuir)-Sonde ("klein" = kein Anteil am gesamten Elektronenabfluss). Floatingpotential  $U = U_{\text{floating}} \rightarrow$  wenn  $I = 0$ . Rechts bzw. links davon **Elektronen-/Ionen**zweig mit jeweils Sättigung  $\rightarrow$  gibt **Dichte**, Steigung der logarithmierten Kennlinie (1. Ableitung) gibt  $T_e$ , Krümmung (2. Ableitung) gibt **EEVF** (falls keine Maxwell-Verteilung vorliegt).

# Kapitel 6

## Gasentladungsphysik

Niedertemperaturplasmen oder auch Gasentladungen lassen sich auf vielfältige Weise und mit entsprechend unterschiedlichen Eigenschaften erzeugen. Wesentliches Element dabei ist das Einbringen eines elektrischen Feldes, das auf die leichten Elektronen einwirkt und ihnen die notwendige Energie zuführt. Entsprechende E-Felder können stationär (DC-Entladungen), in Form von Wechsel- bzw. Hochfrequenz (AC- und HF-Entladungen) oder als Mikrowelle (MW-Entladungen) eingebracht werden. Beginnend mit der DC-Glimmentladung sollen die verschiedenen Entladungsformen nachfolgend näher diskutiert werden.

### DC-Glimmentladung

Vorgegeben sei eine mit zwei Elektroden versehene und mit geringem Druck gefüllte Gasstrecke, an die eine Gleichspannungsquelle angeschlossen wird. Erhöht man die angelegte Spannung langsam, so wird unter bestimmten Bedingungen (Gasdruck, Elektrodenabstand, Spannungswert) der “*Gasdurchbruch*” erfolgen und eine u. U. stationäre Plasmaentladung brennen (typische Werte:  $p \sim$  einige mbar; Dimensionen  $\sim$  einige 10 cm; Spannung  $\sim$  einige 100 V). Dabei laufen die folgenden Vorgänge ab:

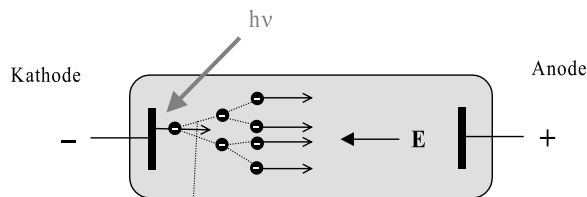


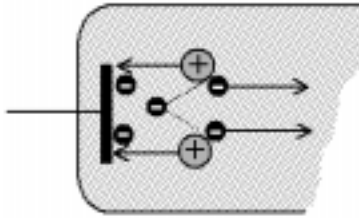
Abbildung 6.1: Prinzip der Glimmentladung

*durch (z.B.) Photon wird (Primär-)Elektron aus der Kathode ausgelöst. Es gewinnt im E-Feld Energie und erzeugt durch (Stoß-)Ionisation weitere Folgeelektronen*

Mit jeder Elektronenauslösung erfolgt ein Stromfluss durch das Gas. Für eine stationäre Entladung müßten aber eigentlich die Elektronen kontinuierlich nachgeliefert werden. Dies ist über den jetzt einsetzenden Kathodenmechanismus möglich: Die Sekundäremission von weiteren Elektronen durch Ionenaufprall, vgl. Abb. 6.2.

Mit den von Townsend eingeführten Koeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  können Zünd- und Existenzbedingungen der resultierenden *Glimmentladung* beschrieben werden, wobei die drei “*Townsend-Koeffizienten*”  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  wie folgt definiert sind:

Abbildung 6.2: Sekundäremission von Elektronen durch Ionenaufprall



$\alpha \equiv$  Anzahl der Ionisationsstöße/Wegstrecke für Elektronen [1/m]

$\beta \equiv$  Anzahl der Ionisationsstöße/Wegstrecke für Ionen<sup>1</sup> [1/m]

$\gamma \equiv$  aus der Kathode ausgelöste Zahl von Sekundärelektronen/Ion

Ein an der Kathode ausgelöstes Primärelektron wird entsprechend  $\frac{dN_e}{dx} = \alpha(x)N_e$  zu einer Lawine von:

$$N_e = 1 \cdot e^{\int_0^d \alpha(x) dx} \rightarrow 1 \cdot e^{\alpha \cdot d} \quad (\text{vereinfacht, } \alpha = \text{const.})$$

anwachsen. Dabei werden zugleich Ionen gebildet, die ihrerseits in Richtung Kathode laufen und dort (mit Verzögerung) eine zweite Lawine auslösen können. Wenn die Entladung mit einem einzigen Elektron startet, ergäbe sich also die folgende Lawinenkette<sup>2</sup>:

<u>Kathode:</u>	<u>Anode</u>
1. (Start)lawine $N_1 = 1$	$\rightarrow N_1 = 1 \cdot e^{\alpha \cdot d}$
2. Lawine $N_2 = \gamma \cdot (e^{\alpha \cdot d} - 1)$	$\rightarrow N_2 = \gamma \cdot (e^{\alpha \cdot d} - 1) \cdot e^{\alpha \cdot d}$
↓	
n. Lawine $N_n = \left( \gamma \cdot (e^{\alpha \cdot d} - 1) \right)^{n-1}$	

Unter der Bedingung:

$$\gamma \cdot (e^{\alpha \cdot d} - 1) \geq 1$$

divergiert offensichtlich die Ladungsträgerzahl in den einzelnen Lawinenketten im Fall von  $n \rightarrow \infty$  ..... die **Entladung zündet!**

Dabei nimmt  $\gamma$ , abhängig vom Kathodenmaterial und in einem Ionenenergiefenster von etwa 50-200 eV, typische Werte von 0,05 ... 0,2 an. Das heißt: Um ein neues Elektron auszulösen müssen ca. 5..20 Ionen auf die Kathode fallen; bei Erreichen der Zündung muss also eine entsprechend hohe "Gasverstärkung" ( $\exp(\alpha \cdot d) \gg 1$ ) vorliegen! Experimentell wird ein entsprechendes Durchbruchverhalten, d. h. ein Stromanstieg in ansteigenden Lawinenfolgen auch

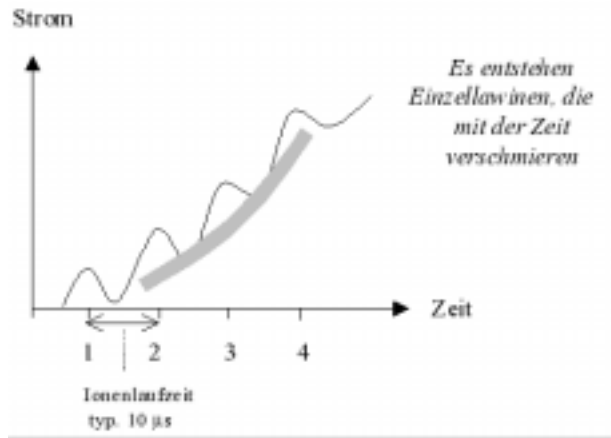
<sup>1</sup>Der  $\beta$ -Koeffizient ist unter praktischen Bedingungen völlig vernachlässigbar und ist hier nur der Vollständigkeit halber mitaufgeführt.

<sup>2</sup>Zur Vereinfachung ist im Folgenden ein räumlich konstanter Wert für  $\alpha$  angenommen.



beobachtet, vgl. Abbildung 6.3.

Abbildung 6.3: Stromanstieg in einer Entladung in ansteigenden Lawinenfolgen



Die genaue Zündbedingung lässt sich auch einfach in Form der nötigen *Zündspannung* quantifizieren. Dazu ist neben  $\gamma$  noch der Koeffizient  $\alpha$  genauer anzugeben.

Bei der Bestimmung des Ionisierungskoeffizienten  $\alpha$  ist davon auszugehen, dass nur sehr wenige Elektronen die volle benötigte Energie (Ionisierungsenergie) erreichen. Die allermeisten werden vielmehr vorher “andere” inelastische Stöße machen und ihre Energie wieder verlieren. Es ist also die Wahrscheinlichkeit zu betrachten, mit der ein Elektron zufällig keinen “anderen” Stoß macht und die volle Strecke  $\lambda_{\text{Ionisation}}$  im E-Feld läuft. Vereinfachend wird weiter angenommen, dass diese Elektronen mit der vollen Energie dann auch wirklich einen Ionisationsstoß machen.

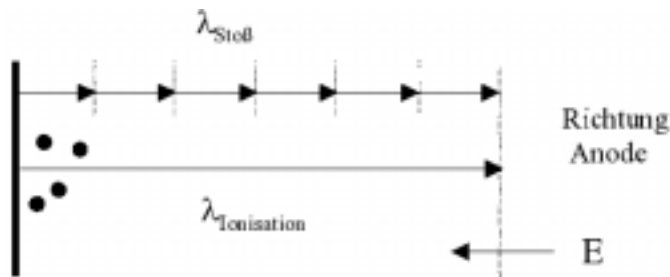


Abbildung 6.4: Schematische Darstellung für Stoß- und Ionisationslängen

Der Fluss der Elektronen, die den Weg  $x$  im elektrischen Feld zurücklegen, ohne einen Stoß zu erleiden ist gegeben durch:

$$\frac{d\phi_e}{dx} = -\frac{\phi_e}{\lambda_{\text{Stoß}}} \quad \rightarrow \quad \phi_e(x) = \phi_e(0)e^{-\frac{x}{\lambda_{\text{Stoß}}}}$$

( $x = 0$  bedeutet hier entweder der Ort der Kathode oder der Ort eines Stoßes  $\hat{=}$  Beginn der Beschleunigungsstrecke).

Der Fluss der Elektronen, die die Ionisierungsenergie erreichen, ist gegeben durch

$$\phi_e(\lambda_{\text{ion}}) = \phi_e(0)e^{-\frac{\lambda_{\text{ion}}}{\lambda_{\text{Stoß}}}} = \phi_e(0)e^{-c\frac{E_{\text{ion}}/E}{\lambda_{\text{Stoß}}}}$$

(wobei die Ionisierungslänge folgt aus  $E_{\text{ion}} = eE\lambda_{\text{ion}}$ ).

Das Verhältnis der Zahl der Stöße, die zu einer Ionisation führen zur Gesamtzahl der Stöße ist dann gegeben durch folgenden Ausdruck

$$\frac{\phi_e(\lambda_{ion})}{\phi_e(0)} = \frac{\alpha}{p} = e^{-c \frac{E_{ion}/E}{\lambda_{StoB}}} = e^{-c_1 \frac{p}{E}} = e^{-c_1 \frac{p \cdot d}{U}}$$

Dabei ist  $\alpha$  wie oben die Anzahl der Ionisationsstöße pro Weglänge. Die Anzahl der Stöße insgesamt wurde proportional zum Druck  $p$  angenommen.

Mit  $\alpha$  und  $\gamma$  in die Zündbedingung  $[exp(\alpha \cdot d) - 1 = 1/\gamma]$  eingesetzt, folgt unmittelbar die sogenannte **Paschen-Kurve** für die Zündspannung einer Glimmentladung:

$$U_Z = A \cdot \frac{p \cdot d}{\ln(B \cdot p \cdot d) - \ln \ln(1 + 1/\gamma)}$$

Dies ist in Abb. 6.5 grafisch dargestellt.

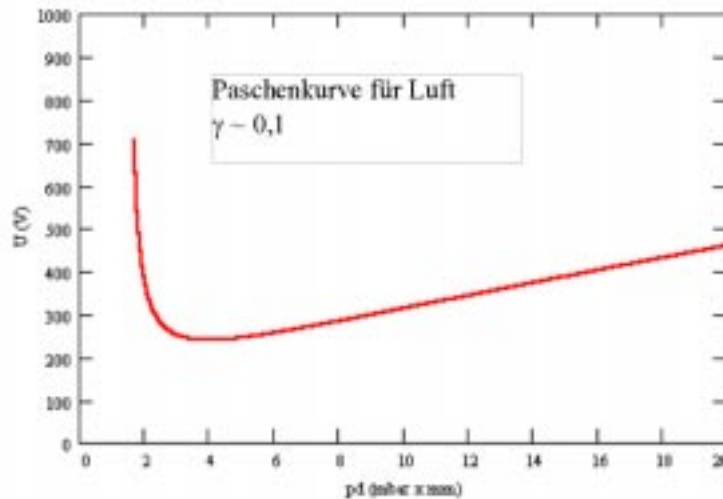


Abbildung 6.5: Graphische Darstellung der Paschen-Kurve für Luft

Man erkennt aus der Abbildung das resultierende Spannungsminimum und den beidseitigen Anstieg mit steigendem bzw. fallendem Gasdruck (bzw.  $pd$ -Werten). Dabei sind die Paschen-Kurven für alle Gase auf der Hochdruckseite nur geringfügig vom Sekundäremissionskoeffizienten abhängig ( $\ln \ln(1 + 1/\gamma)$  im Nenner!). Auch die Gasart (bzw. der  $\alpha$ -Koeffizient) haben keinen erheblichen Einfluss auf den Kurvenverlauf und insbesondere auf das Zündminimum. Auf der “linken” Seite des Minimums gehen die Kurven mit Annäherung an den Vakuumsfall formal gegen  $\infty$ ; hier ist aber zu beachten, dass bei sehr hohen Feldstärken der Durchbruch über Feldemission (aus Oberflächenspitzen) eingeleitet wird. Auch auf der rechten Seite setzt sich der lineare Anstieg bei Annäherung an Atmosphärendruck nicht fort. Hier folgt der ( $\Rightarrow$ ) *Funkendurchbruch* mit reduzierter Durchbruchsspannung!

Das Paschen-Minimum erhält man sofort durch Differenzieren zu:  $B \cdot pd = \ln(1 + 1/\gamma)$ .

Als nächstes stellt sich die Frage, wie sich die Entladung nach der Zündung weiterentwickelt. Dazu ist der aus der ansteigenden Lawinkette resultierende Stromanstieg zu diskutieren, wobei angenommen werden kann, dass sich der Ladungsträgeranstieg schon zeitlich verschmiert

hat (vgl. Abb. 6.3). Außerdem wollen wir annehmen, dass anstelle des einen Startelektrons ganz allgemein ein kontinuierlicher Fremdstrom  $I_0$  ausgelöst wird (Anwendungsbeispiel: Photozelle mit “Gasverstärkung”). Man erhält sofort die folgende Formel für den sich einstellenden Elektronenstrom auf die Anode  $I_A$  (= zugleich Gesamtstrom  $I$ ):

$$I_A = I_K \cdot e^{\alpha d}$$

wobei:

$$I_K = I_0 + I_\gamma = I_0 + \gamma \cdot I_K \cdot (e^{\alpha d} - 1)$$

$I_K$  in die Gleichung für den Entladungsstrom  $I = I_A$  eingesetzt ergibt:

$$I = I_0 \cdot \frac{e^{\alpha d}}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}$$

Wie man anhand des Resonanzennenners erkennt, strebt der Entladungsstrom  $I$  bei Vorliegen der Zündbedingung unabhängig vom primären Auslösestrom  $I_0$  gegen  $\infty$  (falls die Stromversorgung dies zuließe). Für eine derartige Glimmentladung bedeutet dies eine negative (= fallende)  $U/I$ -Kennlinie. Durch einen vorgeschalteten, geeignet großen ohmschen Widerstand kann die Entladung natürlich auf einen gewünschten, kleinen Strom stabilisiert werden (“*subnormale Glimmentladung*”).

Lässt man den weiteren Stromanstieg aber zu, so tritt ein neuer Effekt ein, der die Entladung zur “*normalen Glimmentladung*” stabilisiert. Dieser Mechanismus kann vereinfacht als Ausbildung und Vorrücken einer “virtuellen Anode” verstanden werden und verläuft wie in Abbildung 6.6 dargestellt.

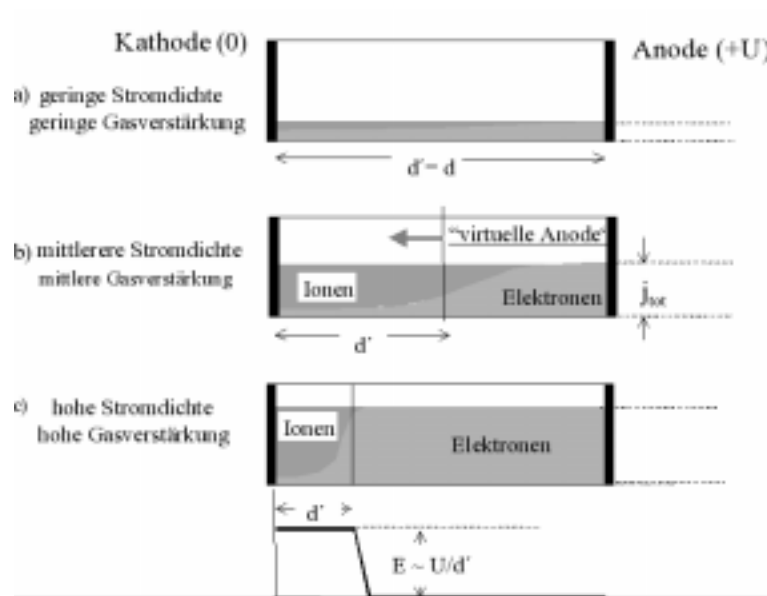
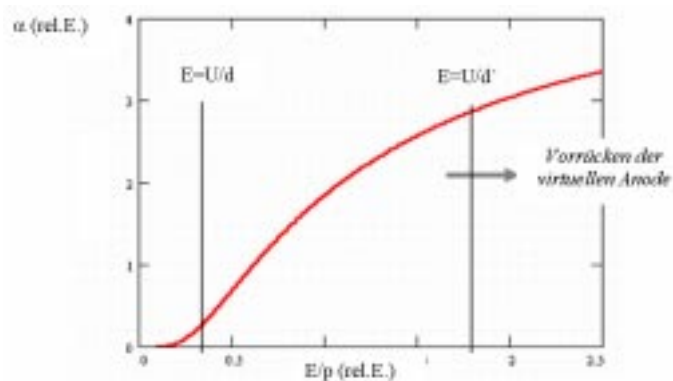


Abbildung 6.6: Schematische Darstellung der Ausbildung einer “virtuellen Anode” bei hoher Stromdichte

Bei geringen Strömen (subnormale Entladung, Fall a) ist das E-Feld zunächst noch weitgehend homogen. Mit steigender Stromdichte und steigender Gasverstärkung (Fall b) müssen im Kathodenbereich aber zunehmend mehr die Ionen den Strom übernehmen, wobei schließlich  $j_i \gg j_e$  gilt. Wegen der viel größeren Ionenmasse ist nunmehr ein sehr viel höheres E-Feld nötig! Es kann sogar näherungsweise angenommen werden, dass sich der gesamte Spannungsabfall nur über den schraffierten "Ionenbereich"  $d'$  erstreckt<sup>3</sup> und im Restgebiet vor der Anode die Feldstärke nahe Null wird.

Zum weiteren Verständnis dieser "normalen" Form der Glimmentladung ist nun die Auswirkung der inhomogenen Feldstärkeverteilung auf die Gasverstärkung zu untersuchen. Dazu soll zunächst die Feldstärkeabhängigkeit des Townsendkoeffizienten  $\alpha$  grafisch dargestellt werden (vgl. angegebene Formel für  $\alpha/p!$ ), siehe Abbildung 6.7.

Abbildung 6.7: Abhängigkeit des Townsendkoeffizienten von der elektrischen Feldstärke



Durch das Vorrücken einer "virtuellen Anode" steigt die Feldstärke  $E = U/d'$  (bzw.  $E/p$ ) an und der Koeffizient  $\alpha$  nimmt zunächst überlinear zu. Mit zunehmender Feldstärke schwächt der Anstieg ab, sodass das Produkt  $\alpha \cdot d'$  ein Maximum durchläuft. Damit kann die hier maßgebende Gasverstärkung  $\mu^4$  angenähert werden durch:

$$\mu \equiv \gamma \cdot \left( e^{\int_0^d \alpha \cdot dx} - 1 \right) \approx \gamma \cdot \left( e^{\alpha \cdot d'} - 1 \right)$$

Diese Funktion durchläuft nun mit der obigen  $\alpha(E)$ -Abhängigkeit durch ein Maximum, wie in der Abbildung 6.8 gezeigt. Dabei ergeben sich genau zwei Punkte, an denen - gemäß  $\mu = 1$  - eine stationäre Entladung existieren kann. Wie man sich leicht überlegen kann, entspricht dabei der erste  $\mu = 1$ -Punkt bei geringerer Feldstärke (= noch wenig vorgerückte virtuelle Anode!) einer instabilen Situation, am zweiten Punkt mit stark vorgerückter virtueller Anode ist Entladung dagegen stabil. Um eine Entladung aber auch am instabilen Punkt betreiben zu können, muss nur ein entsprechend hoher Vorwiderstand vorgeschaltet werden, sodass die Gesamtkennlinie von  $R = R_{Plasma} + R_{vor}$  positiv bleibt. Insgesamt ergibt sich nun die in Abbildung 6.9 gezeigte Strom-/Spannungs-Charakteristik:

Die Abbildung ist wie folgt zu interpretieren: Bevor die Zündspannung erreicht ist, läuft die sogenannte *Dunkelentladung* ab, d. h. ein vorhandener Fremdstrom wird lediglich verstärkt, die

<sup>3</sup>Ausgehend von einer gleichen Stoßfrequenz mit dem Neutralgas folgt gemäß  $K_{Reibung} = \nu \cdot (mv)$  und  $v_i \sim v_e$  für die E-Felder  $E_i/E_e \sim m_i/m_e(!)$ .

<sup>4</sup>Nicht zu verwechseln mit der Beweglichkeit (Mobilitätskonstante)  $\mu$

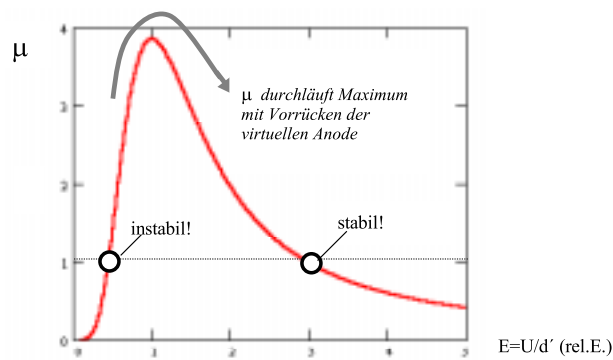
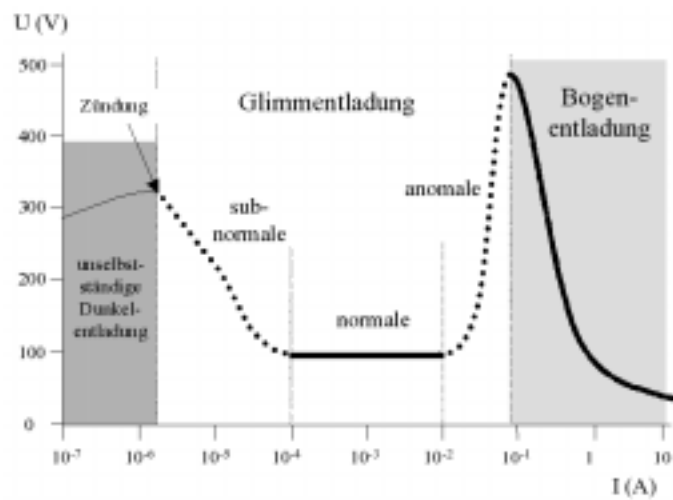


Abbildung 6.8: Abhängigkeit der Gasverstärkung von der “effektiven Feldstärke”  $E = \frac{u}{d'}$

Abbildung 6.9:  $U/I$ -Charakteristik einer Glimmentladung (mit Übergang in die Bogenentladung)



Entladung ist aber nicht selbstständig (erlischt bei Abschalten der Fremdquelle). Nach erfolgreicher Zündung folgen - wie beschrieben - *subnormale* und *normale Glimmentladung*, letztere mit etwa konstanter Spannung bis hin zu einem maximalen Stromwert. Versucht man den Strom weiterzutreiben, ist ein kräftiger Spannungsanstieg nötig (*anomale Glimmentladung*). Für noch größeren Strom, bis in den Amperebereich, schließt ein neuer Entladungsbereich mit nun stark fallender Spannungscharakteristik an: die ( $\Rightarrow$ ) *Bogenentladung*.

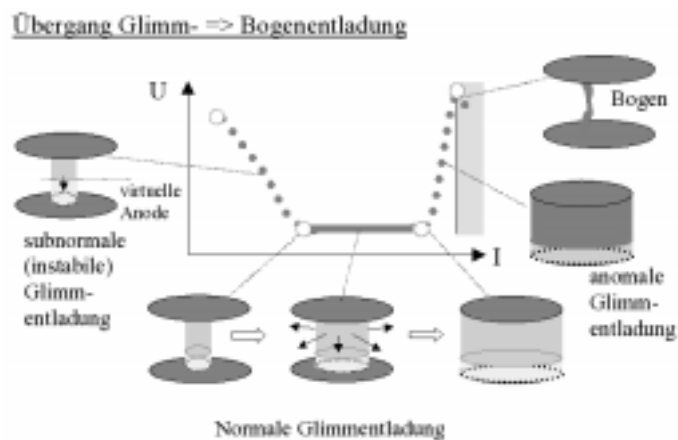
Zu weiteren Details:

Der Übergang subnormale  $\rightarrow$  normale Glimmentladung war bereits (etwas vereinfacht) als Vorrücken einer virtuellen Anode erläutert worden. Nach Erreichen des stabilen Arbeitspunktes nimmt die Entladung zunächst nur einen Teil der Elektrodenfläche ein und dehnt sich dann bei in etwa konstanter Spannung weiter aus. Dabei steigt der Strom entsprechend an. Ist die gesamte Elektrodenfläche überdeckt, wird die kräftige Spannungssteigerung nötig, um den Strom weiter hochzutreiben (anomaler Bereich). Hieran schließt sich der Bogen als neue, nachfolgend zu diskutierende Entladungsform, siehe Abb. 6.10.

### Bogenentladung

Der Übergang von der Glimmentladung in die Niederdruck-Bogenentladung ist sehr einfach zu verstehen: durch die zunehmend höhere Brennspannung der anomalen Glimmentladung wird die Kathode schließlich so heiß, dass *thermische Elektronenemission* einsetzt. (Dabei ist zu beachten, dass praktisch die gesamte Brennspannung der Glimmentladung als Kathodenfall auftritt und zu einer entsprechenden Aufheizung der Kathode führt!).

Abbildung 6.10: Schematische Darstellung zum Übergang von der Glimm- auf die Bogenentladung.



Die Glühemission ist um vieles effizienter als der  $\gamma$ -Mechanismus der Glimmentladung, sodass für den Bogen eine fallende (“negative”) U/I-Kennlinie folgt. Daher benötigt auch der Bogen einen ohmschen Vorwiderstand für den stabilen Betrieb bis hin zu einigen 10 Ampere. Erst bei sehr hohen Strömen (einige 100-1000 A) folgt wieder eine leicht steigende (“positive”) Kennlinie.

Etwas genauer nennt man die hier beschriebene Bogenform mit großflächiger Glühemission einen “*brennflecklosen Bogen*”. Bekanntes Beispiel für einen derartigen Niederdruckbogen ist die ( $\Rightarrow$ ) Leuchtstoffröhre, dabei ist hier noch als besonderes Merkmal zu erwähnen, dass durch spezielle Wahl des Kathodenmaterials (Bariumoxid) eine besonders niedrige Kathodentemperatur erreicht wird (= besserer Wirkungsgrad!).

Neben dem Niederdruckbogen gibt es den “*Hochdruck-Bogen*”, der bei Atmosphärendruck oder noch darüber (bis einige 10 bar) betrieben wird. In diesem Fall erfolgt die Zündung über kurzzeitiges Berühren der Elektroden (z. B. Quecksilber-Hochdruckbogen). Eine weitere Möglichkeit zur Einleitung einer Hochdruck-Bogenentladung ist schließlich der ( $\Rightarrow$ ) *Funkendurchbruch*, der bei hohen Drücken an die Stelle des Zündmechanismus der Glimmentladung tritt.

Schließlich gibt es insbesondere bei hohen Drücken eine zweite Bogenform mit extrem eingeschnürtem Brennfleck auf der Kathode, den “*Brennfleck-Bogen*”. Diese Entladungsform tritt auf bei verhältnismäßig kalter Kathode (z. B. Flüssig-Metall-Elektrode). Beispiel ist der elektrische Schweißbogen.

## Funkendurchbruch

Bei hohen Drücken tritt an die Stelle des Glimmentladungsdurchbruchs (= Kette von Lawinen, 10  $\mu$ s-Zeitskala) der sogenannte Funkendurchbruch, der innerhalb von wenigen 10 ns abläuft ( $\sim$  1000 x schneller!). In diesem Fall beginnt die Entladung mit einem sogenannten Start-“*Streamer*”, der von einem Startelektron ausgelöst wird. Durch Photoemission und Absorption werden Tochter-Streamer erzeugt, und der Durchschlag breitet sich nahezu mit Lichtgeschwindigkeit über die Entladungsstrecke aus. Wesentliches Merkmal ist (neben der Photonenemission) die extrem hohe Kopffeldstärke aufgrund von extrem hoher Gasverstärkung (Nichtlinearität!). Der Ablauf ist in etwa in Abbildung 6.12 skizziert.

Im Ergebnis führt der Streamer zu einem hochleitfähigen Plasmakanal, der bei geeigneter Strom-

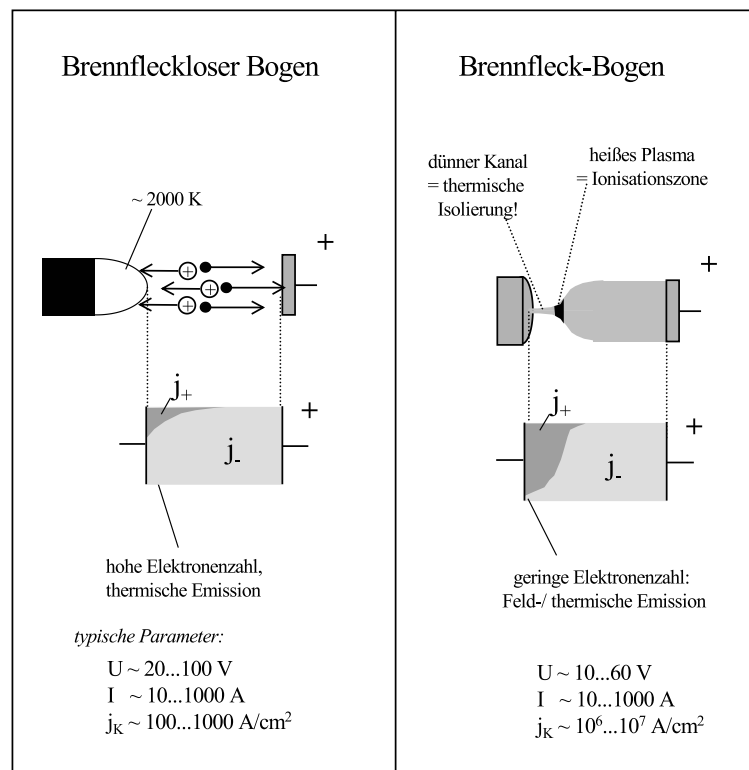


Abbildung 6.11: Schemadarstellung der zwei Bogenvarianten (Brennfleckloser Bogen, Brennfleck-Bogen)

begrenzung in einen stationären Bogen übergeht. Dabei ist der Streamermechanismus bei entsprechend hoher Gasdichte gegenüber der Glimmentladungszündung die begünstigtere Entladungsform (geringere Durchbruchsspannung!)

Der Blitz ist ein Beispiel für den Funkendurchbruch. In der Technik ist der Funkendurchbruch vielfach sehr unerwünscht, z. T. gibt es aber auch nützliche Anwendungen: Funkenstrecke als (Ein-)Schalter ("Schutzfunkenstrecke" bzw. Überspannungsschutz in der Hochspannungstechnik), Unterwasserfunke zur Stoßwellenerzeugung (Zertrümmerung von Steinen in der Medizin, neuerdings auch in der Umwelttechnik zur Schrott- und Betonzertrümmerung verwendet).

## Korona-Entladung, Barriere-Entladung

Mit der *Korona-Entladung* und der *Barriere-Entladung* haben sich zwei weitere Entladungsformen etabliert, die gleichfalls auf dem Streamermechanismus basieren, und die wegen ihrer zunehmenden Bedeutung hier vorgestellt werden sollen:

Die Korona-Entladung ist als "erfolgloser" Funkendurchbruch im stark inhomogenen E-Feld (z. B. Metallspitze, Draht) zu verstehen:

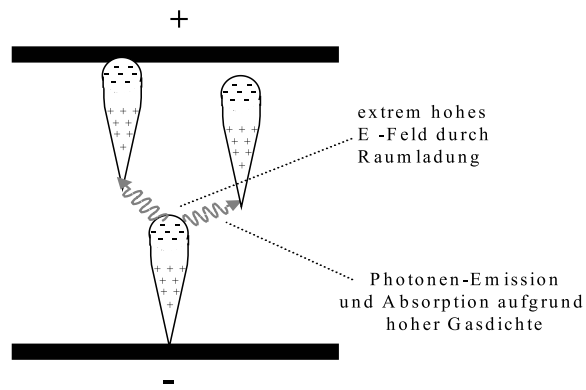


Abbildung 6.12: Schematische Darstellung eines Funkendurchbruchs

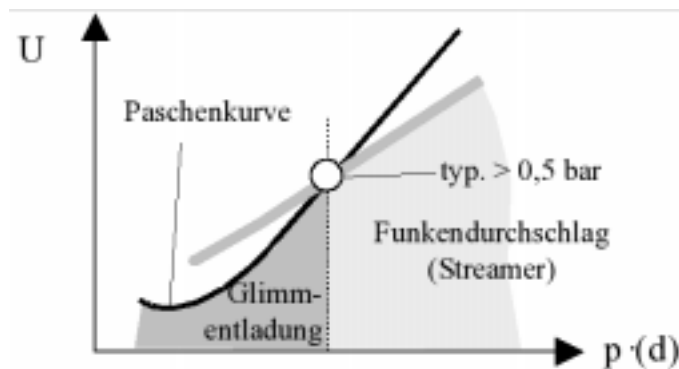


Abbildung 6.13: Übergang von der Glimmentladung zum Funkendurchschlag bei hohem Gasdruck

Wie aus der Abbildung 6.14 sofort deutlich wird, kommt durch Schaffung von negativen Ionen ein geschlossener Stromfluss zustande. Im Streamergebiet besteht der Strom dabei aus Einzelimpulsen und geht im Negativ-Ionen-Gebiet in eine laminare Strömung über. Insgesamt und zeitgemittelt ist die hier dargestellte "negative Korona" dann eine (quasi)-stationäre Entladungsform mit kleiner Stromstärke (bis einige mA) bei hoher Spannung  $U$  (typ. 10 kV).

Analog gibt es auch eine "positive Korona", wobei die Streamer auf die Spitze zulaufen und der Stromkreis durch positive Ionen (es bilden sich z. B. sehr beständige Molekülionen) geschlossen wird. Diese Entladung ist etwas schwieriger zu betreiben (größere Instationarität der Entladung).

Sehr effizient brennt die Korona bei Wechselhochspannung.

Die Korona-Entladung hat bereits umfassende technische Anwendungen gefunden, ist in einem Fall aber auch sehr störend: bei Hochspannungsleitungen - speziell im Fall von Wechselspannung - führt die Korona-Entladung zu erheblichen Leitungsverlusten. Für Höchstspannungsübertragung (typ. 0,5 ... 1 MV) verwendet man daher wieder Gleichspannung, um die Verluste etwas zu reduzieren.

Auch bei der Barriere-Entladung mit homogener Feldanordnung wird die Weiterentwicklung des Streamers in eine stromstarke Entladung verhindert. Dazu wird ganz einfach (mindestens) eine Elektrode mit einer Isolatorschicht (z. B. Glasplatte) versehen. Der beginnende Funkendurchbruch erlischt, wenn die Oberfläche der isolierten Elektrode aufgeladen ist. Durch Um-



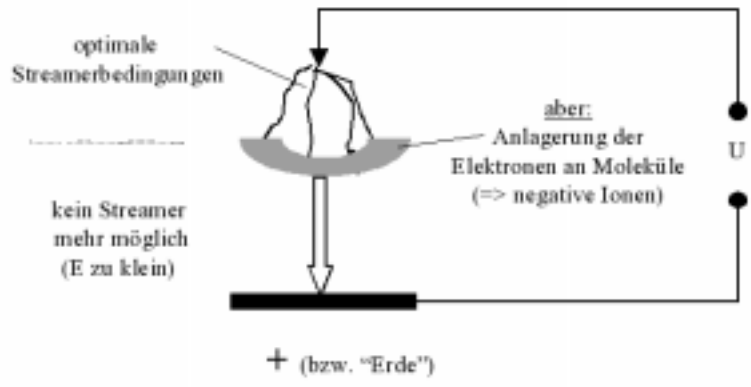


Abbildung 6.14: Prinzipbild der Korona-Entladung

len der Hochspannung (d. h. Wechselspannung) läuft der Mechanismus dann in die entgegengesetzte Richtung, sodass wiederum eine im Zeitmittel stationäre Entladung betrieben werden kann. Die Abbildung 6.15 beschreibt diesen Barriere-Mechanismus:

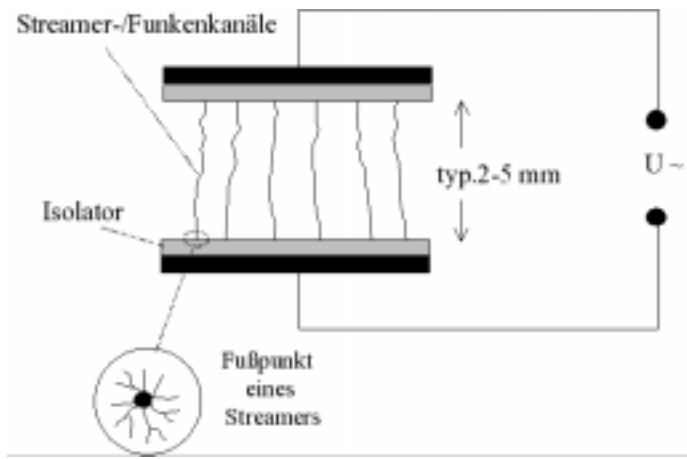


Abbildung 6.15: Prinzipschaltbild einer Barriere-Entladung mit homogener Feldanordnung

Ziel einer guten Barriere-Entladung wird sein, eine große Dichte von Einzelkanälen pro Fläche zu erzielen. Hier hilft die Verwendung steilerer Spannungsimpulse bzw. höherer Wechsel frequencies (z. B. 30 kHz statt 50 Hz).

Die Einzelentladung weist interessante (und technisch wichtige) Merkmale auf:

- Durchbruchspannung      10-20 KV (je nach Abstand)
- Stromstärke                typ. 0,1...1 A
- Leistung                    bis 10 KW/Kanal(!)
- Zeitdauer                    einige 10 ns

Die Elektronendichten liegen bei  $10^{16} - 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ , die Elektronentemperatur bei 5 eV. Aufgrund der kurzen Entladungsdauer bleiben die Ionen und natürlich die Neutralen (trotz der hohen Dichte) kalt, d. h. in etwa bei Zimmertemperatur.

Damit gilt:

- Mit der Barriere-Technik lässt sich ein hochdichtes, aber nicht-thermisches Plasma bei Atmosphärendruck erzeugen!

Als “Problem” bleibt allerdings noch, eine möglichst hohe Flächendichte an Streamerkkanälen zu erzielen, um so eine möglichst hohe Volumenreaktivität zu bekommen. Durch spezielle Maßnahmen - etwa durch höherfrequente Spannungen, Pulsformung, Optimierung des Isolators - lässt sich das gleichzeitige Entstehen vieler Kanäle (etwa einige  $10/\text{cm}^2$ ) erreichen. Für solchermaßen optimierte, moderne Barriere-Entladungen ergeben sich wichtige Einsatzmöglichkeiten in der Plasmaprozesstechnik.

## Anwendungen der Gasentladungen in der Lichttechnik

Der Einsatz von Gasentladungen zur Lichterzeugung hat eine sehr lange Tradition: zufällige Entdeckung von Leuchterscheinungen im Hg-Barometer (= Vakuum + Reibungselektrizität!) im Jahre 1675 (Picard), erste “Leuchtröhre” mit den Zeichen AR (Augustus Rex = August der Starke) ca. 1745 von Winckler in Leipzig, Erfindung/Entwicklung des Lichtbogens ab 1802 (Petrov). Weitere Entwicklungsschritte: Quecksilber-Hochdruckbogen, Höchstdruckbögen, Niederdruckbögen, Leuchtstofflampe (neuerdings als “Energiesparlampe” im Handel), Gaslaser, Plasmadisplay (Flachbildschirm), Flächenstrahler auf Barriereprinzip u. a.). Beispiele von Plasmalichtquellen:

**Leuchtstofflampe:** = Niederdruck-Bogenentladung

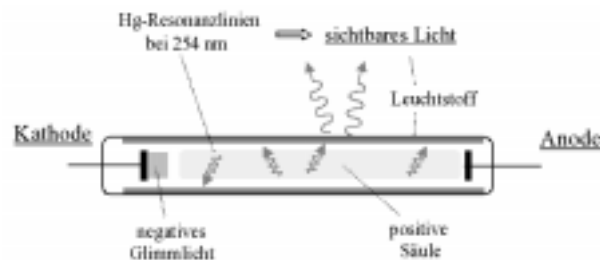


Abbildung 6.16: Prinzip der Leuchtstofflampe

## Einige Details der klassischen Leuchtstofflampe:

### Elektrische Parameter:

$$I = 100 - 400 \text{ mA}, U_{\text{Lampe}} \approx 100 \text{ V}.$$

Wegen der negativen (instabilen!) Kennlinie muss ein hinreichend großer Widerstand vorgeschaltet werden. Hierzu wird (i. A.) eine Drossel verwendet, mit der zugleich an die Netzspannung (230 V/50 Hz) angepasst wird. Kathode mit extrem geringer Austrittsarbeit (BaO), dadurch starke thermische Elektronen-Emission ( $\rightarrow$  Bogenentladung!) bei relativ kalter Kathode ( $\sim 600^\circ\text{C}$ ) möglich (= Voraussetzung für günstige Leistungsbilanz!). Zum Einschalten müssen die Elektroden (jede Seite ist mit 50 Hz wechselweise Kathode!) erst elektrisch vorgeheizt werden. Dazu dient ein spezieller Zündmechanismus (Starter).

Betriebsgase: 3 mbar Argon + ca. 0,007 mbar Hg (im Betriebszustand)

Plasmaparameter:  $T_e \sim 1\text{-}2 \text{ eV}$ ,  $T_{\text{gas}} \sim T_i \sim 100^\circ\text{C}$ ,  $n_e \approx 10^{16} \text{ m}^{-3}$

Lichtemission: bei 254 nm (Hg I-Resonanzlinie)

Umsetzung des UV-Lichtes in sichtbares Licht über einen Leuchtstoff der auf der Glaswand aufgebracht ist.

*Wichtige Eigenschaften von Quecksilber und Argon:*

*3 metastabile Niveaus bei ca. 5 eV, d. h. bei der Hälfte der Ionisierungsenergie (10,4 eV), wirken als "Energiepuffer" für Ionisierung und Speisung des Resonanzniveaus. Dadurch vergleichsweise geringe Temperatur möglich. Dabei wird die Elektronenenergieverteilung im oberen Energiebereich (der für die Hg-Anregung nutzlos ist und nur zusätzliche Energieverluste bewirkt!) abgeschnitten durch das Betriebsgas Argon: Dieses besitzt ein starkes metastabiles Niveau bei ca. 12 eV, das von Elektronen mit höherer Energie sehr gut angeregt wird (großer Querschnitt!). Die hier aus der Verteilungsfunktion herausgenommene Energie geht dabei aber nicht verloren (keine Abstrahlung!), sondern wird immer wieder den Elektronen zugeführt.*

"Problem" der Leuchtstofflampe: Hg (= extrem starkes Gift!!) ist schwierig zu ersetzen! (Versuche mit AlCl und Ba als Hg-Ersatz, ergibt schlechtere Lichtausbeute und Elektrodenprobleme (noch zu kurze Standzeit!)).

Aus der klassischen Leuchtstoffröhre wurde in neuerer Zeit die sogenannte "Energiesparlampe" entwickelt. Neben der kompakteren Form (wesentlich geringerer Querschnitt der Entladung!) werden neuere Modelle anstelle einer Drossel mit elektronischem Vorschaltgerät bei Mittelfrequenz (typ. 30 kHz) betrieben. Beide Maßnahmen erhöhen nochmal den Wirkungsgrad um zusammen ca. 20%.

Weitere neuere Entwicklungen auf dem Gebiet der technischen Lichtquellen sind: Elektrodenlose Lampen (HF-Anregung über Ferrit-Trafo, Mikrowellenanregung) (z. B. ENDURA (Osram) 150 W, 250 kHz, Krypton, >50% Wirkungsgrad!)

**Hoch-/Höchstdruckbogenlampe:** = Thermisches Plasma

Die Hochdruck- bzw. Höchstdruckbogenlampen erreichen im warmen Betriebszustand Gasdrücke von mehreren bar bis 10 bar (Speziallampen bis einige 100 bar). Unter diesen Bedingungen stellt sich ein thermisches Plasma ein mit  $T_e \sim T_i \sim T_{gas}$ .

Ein Beispiel ist die Quecksilberhochdrucklampe (vgl. Abb. 6.17)

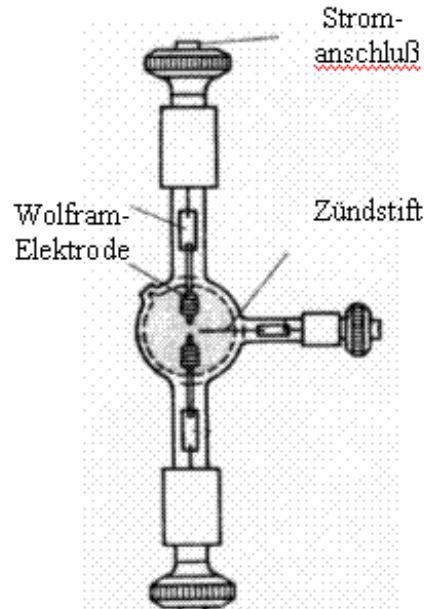


Abbildung 6.17: Klassische Quecksilberhochdrucklampe

Typische Parameter der Hochdrucklampe sind:

Elektrische Parameter:

$$I = 3-5 \text{ A}, U_{Bogen} \approx 100 \text{ V}.$$

d. h. es muss wieder ein Vorschaltgerät verwendet werden!

Die Elektronen-Emission erfolgt jetzt mit sehr heißer ( $>2000^\circ$ ) Wolframkathode.

Betriebsgas: typisch einige bar Hg-Dampf (erst im heißen Zustand!)

Plasmaparameter:  $T_e \sim 1 \text{ eV}, n_e \approx 10^{21-22} \text{ m}^{-3}$

Lichtemission: stark druckverbreiterte Hg-Linien, daher näherungsweise weißes Spektrum!

Entsprechende Hochdrucklampen gibt es auch mit Na-Füllung (Na-Dampf Lampe für Straßenbeleuchtung) und mit Edelgasfüllung (z. B. Xe-, Ar-Bogenlampen für Stadion-Beleuchtung). Neue Entwicklungen sind mikroskopisch kleine Bogenentladungen (Bogenvolumen im  $\text{mm}^3$ -Bereich bei extrem hohen Drucken ( $> 100 \text{ bar}$ )), eingesetzt als Punktlichtquelle für die Fernsehprojektion.

Weitere wichtige Plasmaanwendungen zur Lichterzeugung sind:

“Gas” Laser: z. B. Eximerlaser, Ar-Ionenlaser, CO<sub>2</sub>-Laser usw.

### Barriere-Entladungs-Lichtquellen

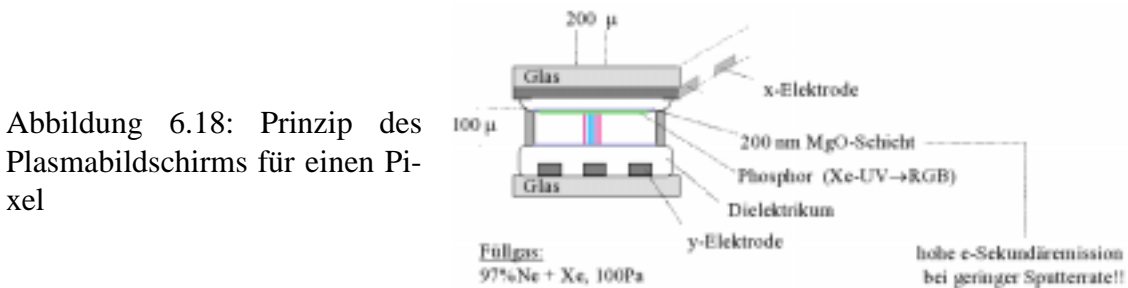
Nach dem Prinzip der Barriere-Technik wurden hier in neuerer Zeit großflächige Strahler entwickelt (auch UV-Strahler), wobei die Lichterzeugung auf dem Eximer-Prinzip beruht. Derartige Lichtquellen bekommen große Bedeutung für die z. T. noch in der Entwicklung befindlichen photochemischen Prozesse (Photochemie!).

### Plasmabildschirm

Merkmale des Plasmabildschirms (Plasmasdisplay) sind:

- Selbstleuchtender Flachbildschirm
- Hohe Lichtstärke, großer Betrachtungswinkel
- Große Dimensionen (z. Zt. bis 42“, 0,2 mm Pixelgröße)
- relativ kostengünstig herstellbar
- Lebensdauer > 10000 h demonstriert!

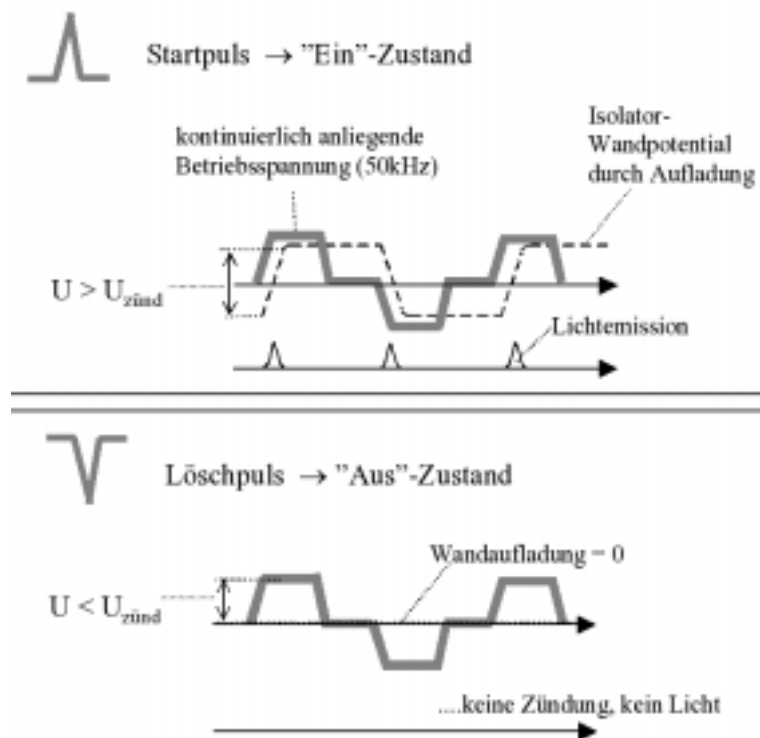
Das Plasmasdisplay beruht auf einer Glimmentladung in den Dimensionen eines einzelnen Pixels. Nachfolgend ist das Funktionsprinzip am Einzelpixel näher dargestellt:



Die Spannungsversorgung einer solchen Entladung erfolgt mit (kontinuierlichen) 50 kHz AC-Pulsen über die x/y-Elektrodenmatrix. Für die Lichtsteuerung wird dabei der Memory-Effekt ausgenutzt, um die Entladung nach Zündung durch den “Ein”-Puls weiterzubrennen, bzw. nach dem “Aus”-Puls ausgeschaltet zu halten:

Wie aus der Schemazeichnung ersichtlich, wird mit der einmal (durch Einschaltimpuls) gezündeten Entladung ein Memory-Effekt erzeugt: Angelegte AC-Pulse in Verbindung mit der verbleibenden Wandaufladung (von der vorangehenden Entladung) reichen zusammen, um die kontinuierliche Wiederzündung zu gewährleisten. Einmal ausgeschaltet (Spannungsabsenkung durch den Auspuls) bleibt das Pixel bis zum nächsten Einpuls dunkel.

Abbildung 6.19: Lichtsteuerung beim Plasmabildschirm (Nutzung des Memory-Effektes)



### Zusammenfassung: Niedertemperaturplasmen, Gasentladungsphysik

Niedertemperaturplasmen zeichnen sich aus durch Elektronentemperaturen (in eV gemessen) deutlich unter der Ionisierungsenergie (typ. 10-20 eV). Der Ionisierungsgrad  $n_e/n_0$  ist in der Regel gering ( $< 10^{-4} \dots < 0,1$ ). Derartige NT-Plasmen werden im Niederdruckbereich ( $< 1 \dots 1000 \text{ Pa}$ ) und Hochdruckbereich ( $0,1 \dots > 1 \text{ bar}$ ) erzeugt, wobei die klassischen Methoden der Gasentladungsphysik eingesetzt werden:

- **Glimmentladung** mit Elektronenemission und e-Lawinenanwachsen ( $\alpha$ - und  $\gamma$ -Mechanismus). Zündung gemäß Paschen-Kurve, Übergang in subnormale, normale und anomale Glimmentladung (mit steigendem Strom). Dabei Stabilisierung (subnormal  $\rightarrow$  normal) durch Auftreten einer virtuellen Anode bzw. starkem Kathodenfall.
- **Bogentladung** (Niederdruck-) durch neuen Kathodenmechanismus der thermischen Elektronenemission bei weiterer Stromsteigerung. Hierbei wieder negative d. h. instabile Strom/Spannungskennlinie.
- **Funkendurchbruch** bei hohen Gasdichten ausgehend von Streamer. Jetzt extrem starker Lawinenanstieg, aus dem Kopf erfolgt Photoemission und Start von Folgelawinen durch Photoabsorption (bei hoher Gasdichte). Streamerausbreitung bis  $1/3 \text{ c}$ . Funke (typ. 30 kV/cm bei 1 bar) leitet (Hochdruck-)Bogen ein.
- **Barriere-Entladung** im Anfangsstadium identisch mit einer Funkenentladung, d. h. gleichfalls Start mit Streamer. Bevor sich stromstarker Funkenkanal ausbildet, wird die Entla-

dung aber rechtzeitig unterbrochen. Dazu ist (mindestens) eine Elektrode mit einer isolierenden Oberfläche (z. B. Glas) versehen. Entladung endet dann mit Oberflächenaufladung des Isolators (Typ. Parameter: einige 10 kV, bis einige A, Zeitdauer etwa nur 10 ns). Durch Umpolen (Wechsel-Hochspannung) kontinuierliche Wechsel-Entladung mit vielen Einzelkanälen/cm<sup>2</sup>.

- **Korona-Entladung** wieder Streamermechanismus aber in stark inhomogenem E-Feld (“Spitze-Platte”). Nur nahe Spitze  $E \geq 30 \text{ kV/cm}$ , danach  $E = \text{klein}$ . Streamer kann nicht weiterlaufen (“verhungert”). Notwendiger elektrischer Stromschluss sodann über negative Ionen (gebildet durch Elektronenanlagerung (“Attachment”)).

Wichtig: In Niederdruckplasmen **Nicht-thermisches Plasma** ( $T_e \gg T_i, T_n \approx \text{Raumtemperatur}$ ) weil zu wenig Stöße, in Hochdruckplasmen **Thermisches Plasma** ( $T_e \approx T_i \approx T_n$ ). Interessante Ausnahme: Korona-, Barriere-Entladung, hier Lebensdauer des Kanals zu kurz für die Thermalisierung → dichtes, nicht-thermisches Plasma!!





# Kapitel 7

## Teilchenbewegung in elektrischen und magnetischen Feldern

Im Plasma werden die Bewegungen der Ionen und Elektronen wesentlich bestimmt durch die überlagerten E- und B-Felder. Die entstehenden Bahnkurven (Trajektorien) der Einzelteilchen werden nachfolgend diskutiert:

### E-Feld (allein)

Das Teilchen erfährt eine einfache Bahnbeschleunigung gemäß:

$$\vec{K} = q \cdot \vec{E}; q = \{-e, +e, +Z \cdot e\}$$

### B-Feld (allein)

Auf eine bewegte Ladung wirkt die Lorentz-Kraft in Richtung senkrecht zu  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$ , also:

$$\vec{K} = q \cdot [\vec{v} \times \vec{B}]$$

Die Kraft senkrecht zur Bahnbewegung  $\vec{v}$  führt bekanntlich zur Kreisbahn, d. h. geladene Teilchen mit Geschwindigkeit (Energie) senkrecht zu einem gegebenen Magnetfeld werden um die Magnetfeldlinien kreisen (“gyrieren”). Das unterschiedliche Ladungsvorzeichen führt zu einer entgegengesetzten Umlaufrichtung von Ionen und Elektronen:

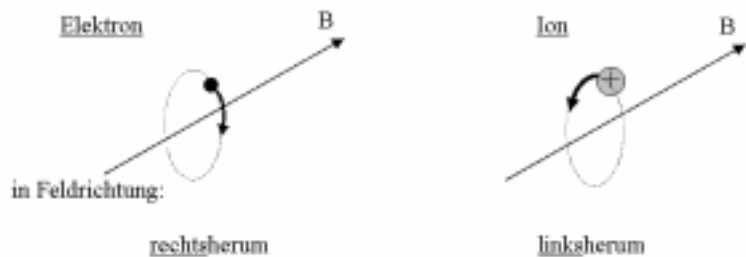


Abbildung 7.1: Gyrationbewegung von Elektronen und Ionen in einem homogenen Magnetfeld

Der bei dieser Kreisbewegung resultierende Bahnradius “Gyrations-(Gyro)Radius” ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht zwischen Lorentz- und Zentrifugalkraft. Für Elektronen bzw. Ionen gilt:

$$r_{ge} = \frac{m_e v_{\perp}}{e \cdot B} \quad \text{bzw.} \quad r_{gi} = \frac{m_i v_{\perp}}{Z \cdot e \cdot B}$$

Aus Gyroradius (bzw. Bahnumfang) und Umlaufgeschwindigkeit folgt sofort die Umlauffrequenz oder “Gyrofrequenz” (im Englischen auch “Cyclotron-Frequenz”):

$$\omega_{ce} = \frac{e \cdot B}{m_e} \quad \text{bzw.} \quad \omega_{ci} = \frac{Z \cdot e \cdot B}{m_i}$$

d. h. die Gyrofrequenz (hier als Kreisfrequenz geschrieben) steigt proportional zum Magnetfeld und umgekehrt zur Masse der Teilchen. Ionen- und Elektronen-Zyklotron-Frequenz liegen (bei  $Z=1$ ) um das Massenverhältnis ( $m_i/m_e$ ) auseinander. Weitere Anmerkung: in heißen Plasmen muss u. U. für  $m_e$  die relativistische Massenerhöhung berücksichtigt werden (Elektronen).

Die Gyrationbewegung der Teilchen erzeugt einen Kreisstrom; das hierdurch erzeugte Magnetfeld ist dem ursprünglichen entgegengerichtet. Ein Einzelteilchen verhält sich also immer *diamagnetisch*.

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt für die Elektronenzyklotronfrequenz

$$\omega_{ce}[\text{Hz}] = 1.76 \times 10^{11} B[\text{T}]$$

Die Ionenzyklotronfrequenz  $\omega_{ci}$  ist um den Faktor  $m_e/m_i$  niedriger.

Typische Werte für die Gyrationfrequenz sind:

In Fusionsplasmen:	$f_{ci} \sim 30 \dots 60 \text{ MHz}$	(= Kurzwelle)
( $B =$ einige Tesla)	$f_{ce} \sim 100 \dots 150 \text{ GHz}$	(= mm-Wellen)
In technischen Plasmen:	$f_{ce} \sim 2,45 \text{ GHz}$	(= Mikrowelle)
( $B \sim 0,1$ Tesla)		

Die Gyrobewegung kann sowohl zur Diagnostik als auch zur Plasmaheizung verwendet werden:

- Bei der Elektronenzyklotronemissionsspektroskopie (ECE) wird die Elektronenzyklotronstrahlung ausgenutzt: Die Kreisbewegung entspricht einer Beschleunigung der Ladung; daher strahlt das Elektron bei der Frequenz  $\omega_{ce}$  (und, wegen relativistischer Effekte, auch bei den Harmonischen  $n\omega_{ce}$ ). Wegen des Resonanzcharakters ist diese Strahlung oftmals optisch dick; dann lässt sich aus der Absolutintensität die Temperatur der Elektronen bestimmen. Dieses Verfahren findet in der Fusionsforschung häufig Anwendung (siehe Kapitel “Plasmadiagnostik”). Wegen  $\omega_{ci} \ll \omega_{ce}$  ist die Intensität der Ionenzyklotronstrahlung viel geringer und diagnostischen Zwecken im Allgemeinen nicht zugänglich.
- Eine eingestrahlte elektromagnetische Welle mit der Frequenz  $\omega_c$  kann Energie auf die Teilchen übertragen; dies ist das Grundprinzip der resonanten Heizung der Elektronen (ECRH = Electron Cyclotron Heating) (siehe Kapitel “Plasmaheizung”).

Da bei einer Kreisbewegung  $v = r\omega$  gilt, können wir den Gyration- oder Larmorradius  $r_L$  im thermischen Plasma mit  $1/2 m v_{\perp}^2 = k_B T$  (2 Freiheitsgrade senkrecht zu  $B$ ) angeben:

$$r_L = \frac{m v_{\perp}}{|q| B} = \frac{\sqrt{2 m k_B T}}{|q| B} \quad \rightarrow \quad r_{Le}[\text{m}] = 3.38 \times 10^{-6} \frac{\sqrt{T_e[\text{eV}]}}{B[\text{T}]}$$

Für 2 T und 1 keV ergibt sich  $r_{Le} = 53\mu\text{ m}$  und  $r_{Li} = 2.2\text{ mm}$ . In Fusionsplasmen sind also beide Gyrationradien klein gegen die Systemlänge. Die Teilchen folgen daher in erster Näherung den Feldlinien; man spricht auch von einem *magnetisierten Plasma*.

Schlussbemerkung: während E-Felder in Plasmen typischerweise nur sehr kleine Werte annehmen können, lassen sich ohne Weiteres auch sehr große B-Felder überlagern. Die Wirkung dieser Felder auf die Teilchenbewegung über die Lorentzkraft fällt entsprechend groß aus und ist u. U. von wesentlicher Bedeutung für das Plasmaverhalten ( $\Rightarrow$  Plasmaeinschluss, aber auch  $\Rightarrow$  resonante Wechselwirkung von HF-Wellen mit der Gyrobewegung, siehe dazu nachfolgende Kapitel).

## Teilchendriften: “Der Guiding Centre” Ansatz

Zusätzlich zur Lorentzkraft kann in der Bewegungsgleichung eine weitere Kraft  $\vec{F}$  auftreten. Der allgemeine Fall schreibt sich dann als

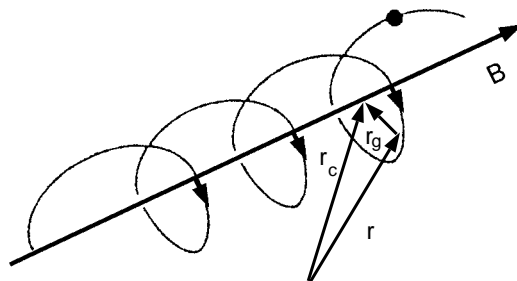
$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Es ergeben sich im Allgemeinen keine geschlossenen Kreisbahnen mehr. Für räumlich und zeitlich konstantes  $\vec{B}$  und  $\vec{F}$  macht man den sogenannten “guiding centre” Ansatz. Dieser geht davon aus, dass die durch  $\vec{F}$  verursachte Bewegung der Gyration überlagert wird. Man erhält dann eine Bewegung des Führungszentrums  $\vec{r}_c$  (d. h. des Mittelpunktes des Gyrationkreises) und überlagert die Gyrobewegung des Teilchens um das Führungszentrum herum. Dies wird ausgedrückt durch einen Vektor  $\vec{r}_g$ , der vom Ort  $\vec{r}$  des Teilchens zum Gyrozentrum zeigt und dessen Betrag den Wert des lokalen Gyroradius hat:

$$\vec{r}_c = \vec{r} + \vec{r}_g \quad \text{mit} \quad \vec{r}_g = \frac{m}{qB^2}\vec{v} \times \vec{B}$$

Dies ist vor allem dann nützlich, wenn die Bewegung des Gyrozentrums langsam im Vergleich zur Gyrationbewegung ist; dann stellt  $\vec{r}_c$  die über die Gyrationbewegung gemittelte Bahnkurve des Teilchens dar. Dies ist, wegen der hohen Gyrationfrequenz, häufig der Fall. Die Abbildung 7.2 verdeutlicht die Geometrie.

Abbildung 7.2: Aufspaltung der Bewegung eines Teilchens im Magnetfeld mit äußerer Kraft in Gyrationbewegung  $\vec{r}_g$  und Bewegung des Führungszentrums  $\vec{r}_c$ .



Die Geschwindigkeit  $\vec{v}_c$  des Führungszentrums lässt sich nun mit Hilfe der Bewegungsgleichung ausdrücken:

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c = \vec{v} + \frac{m}{qB^2} \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{B} = \vec{v} + \frac{1}{qB^2} (\vec{F} + q\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

der letzte Ausdruck lässt sich mit Hilfe der Vektoridentität

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{B} - B^2 \vec{v} = B^2 \vec{v}_{\parallel} - B^2 \vec{v} = -B^2 \vec{v}_{\perp}$$

weiter vereinfachen. Wir erhalten

$$\vec{v}_c = \vec{v} + \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2} - \vec{v}_{\perp} = \vec{v}_{\parallel} + \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2}$$

Somit zerfällt  $\vec{v}_c$  in zwei Anteile:

- Die Parallelbewegung; wegen  $\vec{v} \times \vec{B} \perp \vec{B}$  ist diese durch  $m\dot{v}_{\parallel} = \vec{F}_{\parallel}$  gegeben.
- Die Bewegung senkrecht zu  $\vec{F}$  und  $\vec{B}$ . Da diese trotz konstanter Kraft nicht beschleunigt, sondern mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt, wird sie, ähnlich der mittleren Elektronenbewegung beim Transport, als *Driftgeschwindigkeit*  $\vec{v}_D$  bezeichnet. Sie ist gegeben durch

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2}$$

Es geht also nur der Anteil  $\vec{F}_{\perp}$  ein.

Im Folgenden wollen wir einige Driften aufgrund unterschiedlicher Kräfte  $\vec{F}$  untersuchen.

### $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift

Liegt ein externes  $E$ -Feld vor, so ist  $\vec{F} = q\vec{E}$  und somit

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

Die Driftgeschwindigkeit ist ladungsunabhängig und für Elektronen und Ionen gleich. Dies führt zu einer globalen Bewegung des Plasmas senkrecht zum elektrischen und magnetischen Feld. Abbildung 7.3 veranschaulicht die Driftbewegung: Verläuft die Bahnkurve des Teilchens längs des  $E$ -Feldes, so nimmt es Energie auf und  $v_{\perp}$  und damit auch  $r_L$  wachsen. Kehrt das Teilchen seine Bewegungsrichtung um, so verlangsamt sich die Bewegung, und der Gyrationradius wird wieder kleiner. Das Führungszentrum vollführt dadurch die Driftbewegung senkrecht zu  $E$ .

Die Überlagerung von Gyration- und Driftbewegung lässt sich auch mit Hilfe der Lorentztransformation deuten: Gemäß der Transformation  $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$  verschwindet im mitbewegten System gerade das  $E$ -Feld und das Teilchen führt nur die Gyrobewegung aus.

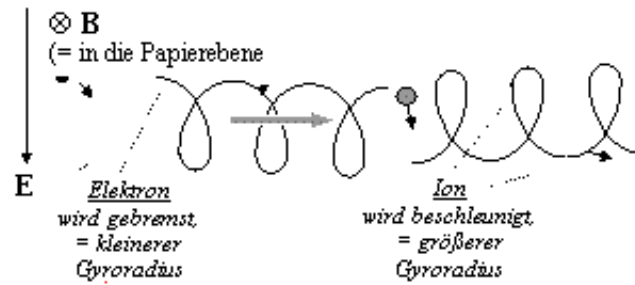


Abbildung 7.3: Veranschaulichung der  $E \times B$  Drift: Das E-Feld zeigt in y-Richtung, das B-Feld in die Zeichenebene hinein. Die Drift erfolgt also längs der x-Achse. Wiederum sind die Gyroradien nicht maßstäblich.

## Gravitationsdrift

Im Gravitationsfeld wirkt die Kraft  $\vec{F} = m\vec{g}$ , sodass die Gravitationsdrift durch

$$\vec{v}_D = \frac{m\vec{g} \times \vec{B}}{qB^2}$$

gegeben ist. Diese Bewegung lässt sich anschaulich analog zur  $\vec{E} \times \vec{B}$  Drift deuten: Wiederum gewinnt das Teilchen bei Bewegung längs  $\vec{g}$  Energie, während es in Gegenrichtung Energie verliert.

Die Gravitationsdrift ist ladungsabhängig und führt zur Ladungstrennung und zu einem Strom

$$\vec{j}_g = n_e e (\vec{v}_i - \vec{v}_e) = n_e \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{qB^2} \left( \frac{m_i}{Z} + m_e \right)$$

Dieser ist in Laborplasmen klein: Für  $B = 1\text{ T}$  und  $n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$  ergibt sich  $j_g = 10^{-6} \text{ A/m}^2$ . In kosmischen Plasmen, in denen die Gravitationskraft oftmals eine dominante Rolle spielt, sind diese Effekte jedoch häufig nicht zu vernachlässigen.

## Diamagnetische Drift

In Anwesenheit eines Druckgradienten erfahren die Teilchen eine weitere Kraft: Die Kraft auf ein Volumenelement  $\delta V$  des Plasmas ist durch die Druckdifferenz gegeben, d. h.  $F/\delta V = -\nabla p$ . Im Volumenelement befinden sich  $\delta N = n\delta V$  Teilchen, sodass pro Teilchen die Kraft  $-\nabla p/n$  ausgeübt wird. Dies führt also zu einer Drift

$$\vec{v}_D = -\frac{\nabla p \times \vec{B}}{qnB^2}$$

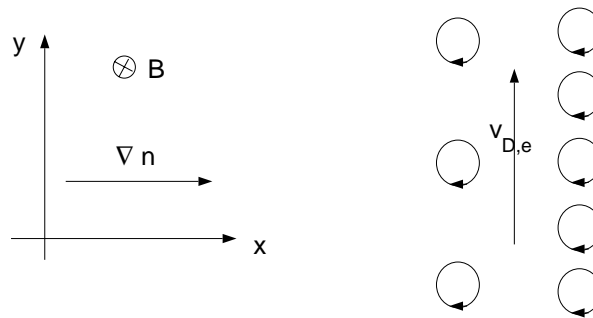
Anschaulich lässt sich diese Drift wie folgt deuten:

Zur Vereinfachung betrachten wir nur die Elektronen, der Druckgradient werde durch  $\nabla n_e$  verursacht (d. h.  $T_e = \text{const}$ ). Dann nimmt längs des Druckgradienten die Zahl der gyrierenden Teilchen zu. An einem beliebigen Punkt im Plasma bewegen sich also mehr Teilchen in positive y-Richtung; die Elektronen scheinen in y-Richtung zu driften. Man beachte aber, dass man

es nicht mit einer Massenbewegung zu tun hat; die Teilchen selbst bleiben an ihrem Ort. Es entsteht jedoch ein Strom

$$\vec{j}_D = -\frac{\nabla p \times \vec{B}}{B^2}$$

Abbildung 7.4: Veranschaulichung der diamagnetischen Drift der Elektronen:  $\nabla n$  zeigt in  $x$ -Richtung, das  $B$ -Feld in die Zeichenebene hinein. Die Drift erfolgt also längs der  $y$ -Achse.



Dieser ist so gerichtet, dass das von ihm erzeugte Magnetfeld das ursprüngliche Magnetfeld im Gebiet hohen Druckes schwächt. Das Plasma verhält sich also diamagnetisch; man spricht daher auch von der diamagnetischen Drift. Für die Ionen gelten die gleichen Verhältnisse. Multiplizieren wir obige Gleichung vektoriell von rechts mit  $\vec{B}$ , so erhalten wir  $\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p_{\perp}$ . Ein Druckgradient senkrecht zum Magnetfeld wird also im Plasma durch einen diamagnetischen Strom kompensiert. Diesem Ergebnis werden wir in der MHD-Kraftgleichung wieder begegnen.

## Polarisationsdrift

Wir wollen nun die Teilchenbewegung in Anwesenheit eines zeitlich veränderlichen elektrischen Feldes untersuchen. Hier ergibt sich zusätzlich zu der oben abgeleiteten  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift auch eine Bewegung in Richtung des  $\vec{E}$ -Feldes. Dies kann anschaulich an Hand der folgenden Abbildung verstanden werden. Dabei nehmen wir der Einfachheit halber an, dass  $\vec{E}$  in der Zeit linear anwächst. Wie bei der  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift wird das Teilchen parallel zum  $\vec{E}$ -Feld beschleunigt und abgebremst, wenn es dem  $\vec{E}$ -Feld entgegenläuft. Da nun aber das  $\vec{E}$ -Feld ständig anwächst, kompensieren sich die in  $x$ -Richtung zurückgelegten Wegstrecken nicht und es bleibt eine Komponente der Bewegung in Richtung des  $\vec{E}$ -Feldes übrig.

Die Polarisationsdrift kann aus der Bewegungsgleichung hergeleitet werden. Für die Geometrie in der Abbildung 7.4 gilt:

$$m\dot{v}_x = qv_y B_z + qE_x$$

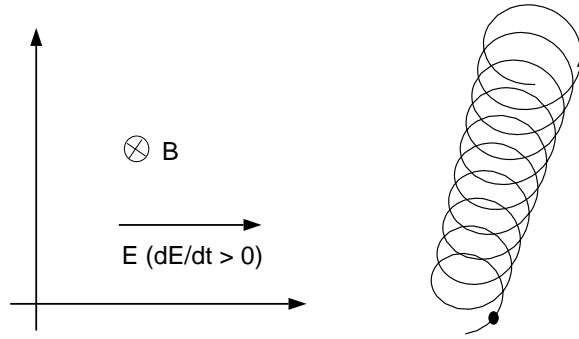
$$m\dot{v}_y = -qv_x B_z$$

Daraus findet man die folgende Gleichung:

$$m\ddot{v}_x = -\frac{q^2}{m} B_z^2 v_x + q\dot{E}_x$$

Wir sind nur an der Driftbewegung interessiert, d. h. wir können über viele Gyrationen

Abbildung 7.5: Zur Veranschaulichung der Polarisationsdrift: Bei zeitlich anwachsendem E-Feld schließen sich die Gyroradien auch in E-Feldrichtung nicht mehr und zusätzlich zur  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift ergibt sich eine Drift in Richtung von  $\vec{E}$ .



mitteln. Dann verschwindet der Term mit der zweimaligen Zeitableitung (der von der Gyrationbewegung her stammt) und wir erhalten die Polarisationsdrift:

$$v_x = \frac{m}{qB_z^2} \dot{E}_x$$

Da die Geometrie beliebig war, gilt dieses Ergebnis allgemein. Wegen der Ladungsabhängigkeit führt die Polarisationsdrift zu einem Polarisationsstrom. Dieser wird wegen der großen Ionenmasse im Wesentlichen von den Ionen getragen:

$$\vec{j}_{pol} = \frac{nm_i}{B^2} \dot{\vec{E}}$$

Der Name Polarisationsstrom erklärt sich aus der Analogie zum Polarisationsstrom in den Maxwell-Gleichungen, welcher auch einer zu  $\dot{\vec{E}}$  proportionalen Stromdichte entspricht. Der Polarisationsstrom ist wichtig beim Aufbau elektrischer Felder im Plasma. Dies soll im Folgenden gezeigt werden:

Wir betrachten einen fiktiven Kondensator, der mit einem magnetisierten Plasma gefüllt sei, wobei das B-Feld parallel zu den Platten verlaufe. Aus der Elektrodynamik wissen wir, dass beim Aufladen eines Kondensators durch die auf die Kondensatorplatten aufgebrauchte freie Ladung  $\rho_{frei}$  die dielektrische Verschiebung  $\vec{D}$  gemäß  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{frei}$  bestimmt ist. Das elektrische Feld  $\vec{E}$  im Kondensator bestimmt sich hingegen mit der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  zu  $\vec{E} = \vec{D} / (\epsilon_0 \epsilon)$ . Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung erhalten wir

$$\nabla \cdot \dot{\vec{D}} = \dot{\rho}_{frei} = -\nabla \cdot \vec{j}_{frei} = -\nabla \cdot (\vec{j} - \vec{j}_{geb})$$

wobei der gebundene Strom  $\vec{j}_{geb}$  gerade durch den Polarisationsstrom gegeben ist. Den Gesamtstrom  $\vec{j}$  erhalten wir aus der Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 c^2} \nabla \cdot \dot{\vec{E}}$$

sodass man folgenden Ausdruck erhält:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \left( \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} - \frac{nm_i}{B^2} \vec{E} \right) = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt schließlich für die senkrechte Dielektrizitätskonstante eines magnetisierten Plasmas:

$$\varepsilon = 1 + \frac{nm_i}{B^2} = 1 + \frac{c^2}{\nu_A^2}$$

wobei  $\nu_A = B/\sqrt{\mu_0 n m_i}$  die sogenannte Alfvén Geschwindigkeit ist, die uns bei den Wellenphänomenen wieder begegnen wird. Sie ist im Allgemeinen klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, sodass  $\varepsilon$  sehr große Werte annimmt. Ein magnetisiertes Plasma schirmt daher  $E$ -Felder wirkungsvoll ab. Ladungstrennung führt hauptsächlich zur  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift und somit zur Aufnahme kinetischer Energie (d. h.  $\vec{E}$  bewirkt eine Beschleunigung des Plasmas); der Polarisationsstrom schließt das Feld senkrecht zum Magnetfeld kurz.

Dies sieht man auch an der Energiebilanz:

$$W_{tot} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} n m_i \frac{E^2}{B^2}$$

wobei der erste Summand die Energiedichte des  $E$ -Feldes darstellt, der zweite genau die kinetische Energiedichte des Plasmas auf Grund der  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift angibt.

## $\nabla B$ Drift

Bisher hatten wir vorausgesetzt, dass das  $B$ -Feld zeitlich und räumlich konstant sei. Im allgemeinen Fall  $B = f(x, t)$  kann man die Bewegungsgleichung nicht mehr geschlossen lösen. Der Guiding Centre Ansatz bleibt jedoch dann ein guter Ansatz, wenn die Skala der räumlichen bzw. zeitlichen Variation des  $B$ -Feldes klein gegen die typischen Skalen der Gyrobewegung sind. Dies ist der Fall, wenn  $\nabla B \ll B/r_L$  bzw.  $\dot{B} \ll \omega_c B$ .

Im inhomogenen Magnetfeld erfahren die geladenen Teilchen eine Kraft aufgrund des Gradienten der Feldstärke. Aus der Atomphysik (Stern-Gerlach-Versuch) ist bekannt, dass sich diese Kraft als

$$F = -\mu \nabla B \text{ mit } \mu = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

schreiben lässt, wobei  $\mu$  das magnetische Moment des Teilchens ist. Es ergibt sich aus dem Produkt des mit der Gyrobewegung verbundenen Kreisstroms und der vom Strom umrandeten Fläche:

$$\mu = IA = q \frac{\omega_c}{2\pi} \pi r_L^2 = q \frac{qB}{2m} \left( \frac{m\nu_{\perp}}{qB} \right)^2 = \frac{m\nu_{\perp}^2}{2B} = \frac{E_{kin,\perp}}{B}$$

Die Kraft bewirkt eine Drift senkrecht zum Gradienten und zu  $B$  mit der Driftgeschwindigkeit

$$\nu_D = -\frac{m\nu_{\perp}^2}{2qB^3} \nabla B \times B$$

Anschaulich läuft das Teilchen bei der Gyration in Bereiche unterschiedlicher Magnetfeldstärke und daher variiert der Gyroradius während eines Umlaufes analog zu Abbildung 7.3.



## Krümmungsdrift

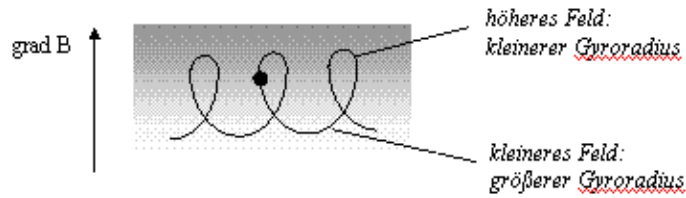


Abbildung 7.6: anschauliche Darstellung für die  $\nabla B$ -Drift

Wegen  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  bedingt ein Gradient der magnetischen Feldstärke im Allgemeinen auch eine Krümmung der Feldlinien. Folgen die Teilchen den Feldlinien, so erfahren sie im gekrümmten Magnetfeld aufgrund ihrer Parallelgeschwindigkeit eine Zentrifugalkraft. Bei einer Kreisbewegung ist diese vom Betrag  $F = m\omega^2 r = m\nu_{\parallel}^2 / r$ ; im allgemeinen Fall hat man den Radius  $r$  durch  $R_c$ , den lokalen Krümmungsradius zu ersetzen. Dies ist der Radius des Schmiegekreises im betrachteten Ortspunkt, siehe Abbildung 7.7:

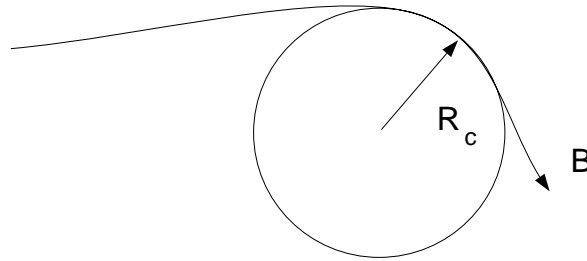


Abbildung 7.7: Zur Definition des lokalen Krümmungsradius  $R_c$ .

Er berechnet sich im Vakuum ( $\nabla \times B = 0$ ) zu

$$\frac{1}{R_c} \vec{e}_{R_c} = -\frac{\nabla B}{B}$$

Die Zentrifugalkraft zeigt also in Richtung von  $\nabla B$ , sodass man für die sogenannte Krümmungsdrift

$$\vec{v}_D = -\frac{m\nu_{\parallel}^2}{qB^3} \nabla B \times \vec{B}$$

erhält.

### Anwendung: Driften im toroidalen Magnetfeld

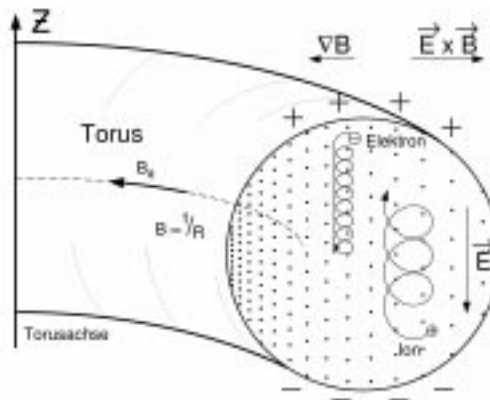
Wir können die  $\nabla B$  und die Krümmungsdrift zusammenfassen:

$$\vec{v}_D = \frac{m}{qB^3} \left( \nu_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}\nu_{\perp}^2 \right) \vec{B} \times \nabla B$$

Die gesamte Drift im gekrümmten Magnetfeld ist somit näherungsweise proportional zur kinetischen Energie des Teilchens. Wir untersuchen nun die Drift geladener Teilchen im rein

toroidalen Magnetfeld. Dies beschreiben wir, wie in der Abbildung 7.8 dargestellt, in einem Zylinderkoordinatensystem  $R, \phi, z$ .

Abbildung 7.8: Teilchendriften im rein toroidalen Magnetfeld. Die Drift im inhomogenen Feld führt zur Ladungstrennung, das resultierende E-Feld transportiert das Plasma über die  $E \times B$ -Drift nach außen.



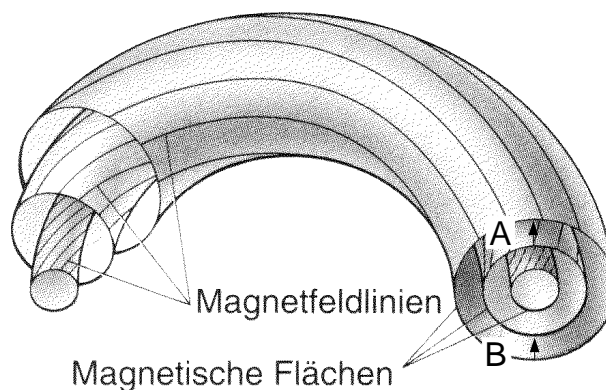
Das Toroidalfeld ist dann durch  $\vec{B}_\phi = B_0 R_0 / R \vec{e}_\phi$  gegeben ( $B_0$  sei die Feldstärke im Plasmazentrum  $R = R_0$ ). Für den Gradienten des Feldes erhalten wir so

$$\nabla B = -B_0 \frac{R_0}{R^2}$$

Der Gradient zeigt in  $R$ -Richtung, d. h. die Drift erfolgt in  $z$ -Richtung. Da die Drift im inhomogenen Magnetfeld vom Vorzeichen der Ladung des Teilchens abhängt, driften Elektronen und Protonen in unterschiedliche Richtung. In der Abbildung driften die Elektronen nach unten, die Protonen nach oben. Die Driftgeschwindigkeit beträgt für ein typisches Zahlenbeispiel aus der Fusion ( $R = 1\text{m}, B = 1\text{T}, T = 1\text{keV}$ )  $\approx 1\text{km/s}$ . Wir erhalten so sehr schnell ein elektrisches Feld in  $z$ -Richtung. Dieses führt wiederum zu einer  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift in  $R$ -Richtung. Wie oben angesprochen, führt diese zum radialen Transport des Plasmas aus dem Torus heraus. Im rein toroidalen Magnetfeld können Teilchen also nicht eingeschlossen werden.

Ein effizienter Einschluss geladener Teilchen wird hingegen in toroidaler Geometrie erreicht, wenn zusätzlich zum Toroidalfeld noch eine poloidale Magnetfeldkomponente (z. B. durch einen im Plasma fließenden toroidalen Strom) vorhanden ist. Die Magnetfeldlinien winden sich dann helikal um die Torusseele herum und spannen sogenannte *magnetische Flächen* auf. Diese sind, wie unten dargestellt, ineinander geschachtelt.

Abbildung 7.9: Magnetische Flächen auf einem Torus, aufgespannt durch Magnetfeldlinien, welche sowohl eine toroidale, als auch eine poloidale Komponente haben.



Der Effekt der Drift im inhomogenen Magnetfeld hebt sich jetzt auf: wir betrachten ein Proton im Punkt A der Abbildung 7.9. Auf Grund der Inhomogenität des Magnetfeldes driftet es, wie

oben beschrieben, nach oben, d. h. auf eine Feldlinie, welche weiter vom Plasmazentrum entfernt ist. Auf dem Weg längs der Feldlinie kommt das Teilchen in die untere Torusfläche (z. B. Punkt B). Hier driftet es ebenfalls nach oben, dies bedeutet jedoch jetzt eine Drift zum Plasmazentrum, d. h. zurück zur ursprünglichen Feldlinie. Der Nettoeffekt der Drift im inhomogenen Magnetfeld ist also ein Versatz der magnetischen Fläche um ungefähr einen Gyroradius (sog. *Driftfläche*); es kommt jedoch nicht zu nennenswerter Ladungstrennung und damit nicht zur starken Auswärtsdrift.

Wir erhalten also im Einzelteilchenbild das Ergebnis, dass ein effektiver Einschluss von Teilchen im reinen Toroidalfeld nicht möglich ist; vielmehr eignen sich helikal verschraubte Magnetfelder zum Plasmaeinschluss. Dieser Tatsache werden wir bei der Behandlung des Plasma-gleichgewichtes im MHD-Bild wieder begegnen.

## Adiabatische Invarianten

Aus der Mechanik ist bekannt, dass bei einer periodischen Bewegung, zusätzlich zu den Erhaltungsgrößen Energie, Impuls und Drehimpuls, weitere Invarianten der Bewegung vorhanden sind. Diese sind von der Form

$$I = \oint pdq$$

wobei  $q$  eine verallgemeinerte Koordinate und  $p$  der zugeordnete verallgemeinerte Impuls ist. Das Integral ist über eine Periode der Bewegung auszuführen. Diese Invarianten haben die Dimension einer Wirkung; ihnen kommt häufig eine besondere Bedeutung zu (man denke an die Einführung der Quantenmechanik über die Quantisierung des Wirkungsintegrals). Der besondere Nutzen dieser Invarianten liegt darin, dass sie auch bei einer kleinen Störung der Periodizität erhalten bleiben. Eine kleine Störung ist derart, dass die Periode der Bewegung noch gut definiert ist, obwohl das Teilchen nach einem Umlauf nicht mehr an denselben Punkt im Phasenraum zurückkehrt. Die Invariante wird dann als *adiabatische Invariante* des Systems bezeichnet.

Wir wollen dieses Konzept auf die Bewegung eines Teilchens im Magnetfeld anwenden. Verstehen wir unter der periodischen Bewegung die Kreisbewegung des gyrierenden Teilchens, so bedeutet die Kleinheit der Störung wiederum  $\nabla B \ll B/r_L$  bzw.  $\dot{B} \ll \omega_c B$ . Dann können wir als verallgemeinerte Koordinate die Winkelkoordinate der Gyrationbewegung wählen und der zugehörige Impuls ist der senkrechte Drehimpuls des Teilchens. Wir erhalten also auf der Kreisbahn

$$\oint pdq = \int_0^{2\pi n} m\omega_c r_L^2 d\theta = 2\pi m\omega_c r_L^2 = 4\pi \frac{m}{q} \frac{m\nu_{\perp}^2}{2B} = 4\pi \frac{m}{q} \mu$$

Für festes  $m/q$  ist also das magnetische Moment  $\mu$  eine adiabatische Invariante der Bewegung. Man bezeichnet  $\mu$  auch als erste adiabatische Invariante; weitere Invarianten werden kurz am Ende des Kapitels vorgestellt.

Die adiabatische Invarianz des magnetischen Moments findet eine Anwendung bei der Beschreibung der Teilchenbahnen im sogenannten magnetischen Spiegel. Darunter versteht man die Reflexion eines Teilchens im Gebiet höheren Magnetfeldes: Läuft ein Teilchen in ein Gebiet höherer Magnetfeldstärke, so nimmt wegen der Invarianz des magnetischen Momentes  $\mu = m\nu_{\perp}^2/(2B) = \text{const}$  die Senkrechtenergie  $1/2m\nu_{\perp}^2$  im gleichen Maße wie  $B$  zu. Da gleich-

zeitig Energieerhaltung  $\frac{1}{2}m(\nu_{\perp}^2 + \nu_{\parallel}^2) = \frac{1}{2}m\nu^2 = const$  gilt, muss  $\nu_{\parallel}$  abnehmen. Das Teilchen wandelt Parallel- in Senkrechtenergie um. Dies kann soweit gehen, dass  $\nu_{\parallel} = 0$  erreicht wird, d. h. die gesamte Parallelenergie in Senkrechtenergie umgewandelt ist. Dann kann das Teilchen nicht weiter in die Richtung höheren Feldes vordringen; die Trajektorie dreht an der sogenannten *Reflexionsebene* um. Daher spricht man vom *magnetischen Spiegel*. Die Verhältnisse sind in Abbildung 7.10 skizziert.

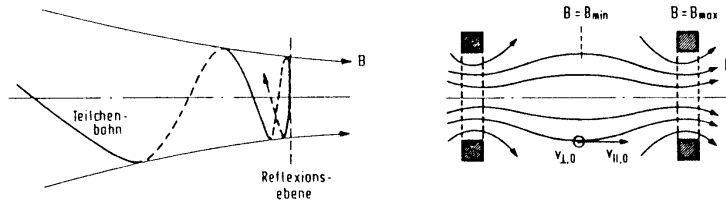


Abbildung 7.10: Teilchenbewegung im magnetischen Spiegel: Reflexion eines Teilchens im Gebiet höherer Feldstärke (links) und Spiegelmaschine zum Plasmaeinschluss (rechts).

Rechts ist eine sogenannte *Spiegelmaschine* zum Plasmaeinschluss zu sehen. Dies ist eine lineare Anordnung, die, zur Reduktion der Endverluste, magnetische Spiegel als Endverschluss hat. Das Magnetfeld variiert also zwischen  $B_{min}$  im Zentrum der Anordnung und  $B_{max}$  an den Enden. Wegen der Invarianz des magnetischen Momentes erhöht sich  $\nu_{\perp}^2$  von  $\nu_{\perp}^2(0)$  im Zentrum der Anordnung auf  $B_{max}/B_{min}\nu_{\perp}^2(0)$  an den Enden. Gespiegelt werden also alle Teilchen, bei denen die Gesamtenergie kleiner als die zur Erhaltung des magnetischen Momentes notwendige Senkrechtenergie ist, d. h.

$$\frac{1}{2}m\nu_{\perp}^2(0) + \frac{1}{2}m\nu_{\parallel}^2(0) < \frac{B_{max}}{B_{min}} \frac{1}{2}m\nu_{\perp}^2(0) \quad \rightarrow \quad \frac{\nu_{\parallel}^2(0)}{\nu_{\perp}^2(0)} < \frac{B_{max}}{B_{min}} - 1$$

Die Größe  $B_{max}/B_{min}$  wird auch als Spiegelverhältnis bezeichnet. Teilchen, welche die Ungleichung erfüllen, werden gespiegelt und somit eingeschlossen. Die Endverluste werden somit reduziert, können aber, wegen des endlichen Spiegelverhältnisses, nicht vollständig vermieden werden. Wegen ihrer höheren Geschwindigkeit gehen die Elektronen zunächst schneller verloren; dies führt wieder zum Aufbau eines elektrischen Feldes, welches Elektronen zurückweist und Ionen beschleunigt, sodass der Gesamtverlust elektrisch neutral ist ("ambipolares Feld"). Aus der Spiegelbedingung ergibt sich der sogenannte Verlustkegel im Geschwindigkeitsraum (siehe Abbildung 7.11). Durch das sich ausbildende elektrische Feld wird der Teilchenverlust zwar begrenzt, Stöße führen allerdings dazu, dass es kontinuierlich zu Verlusten kommt.

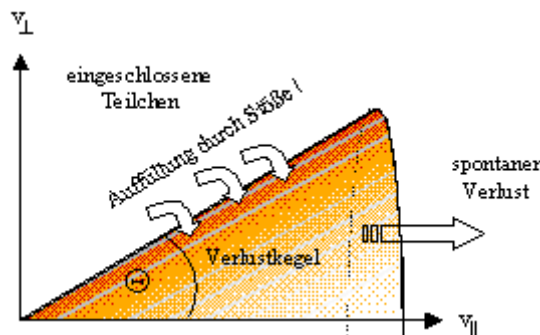


Abbildung 7.11: Verlustkegel im Geschwindigkeitsraum für einen Einschluss im magnetischen Spiegel

Man ist u. U. aber auch am Ausstoß der Teilchen aus einer Spiegelgeometrie interessiert ( $\Rightarrow$  Plasmatechnologie, Teilchenbeschuss von Oberflächen!). In diesem Fall verwendet man eine einseitige offene Anordnung, vgl. Abbildung 7.12.

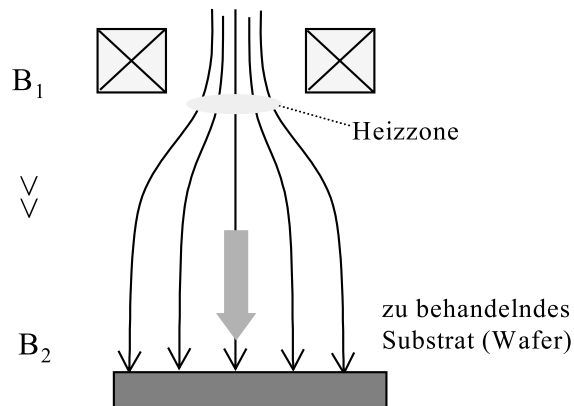


Abbildung 7.12: Offener magnetischer Spiegel zur Behandlung von Oberflächen

Zusätzlich zu den Endverlusten tritt beim Spiegel eine spezifische Instabilität (sogenannte *Austausch-Instabilität*) auf, welche auch den radialen Transport (senkrecht zum Magnetfeld) drastisch erhöht; die Spiegelmaschine hat sich daher nicht als Einschlusskonzept durchsetzen können und ist heutzutage von toroidalen Anordnungen verdrängt worden.

Ein magnetischer Spiegel tritt auch bei der Bewegung hochenergetischer geladener Teilchen im Erdmagnetfeld auf. Diese aus dem Sonnenwind stammenden Teilchen können im sogenannten Van-Allen-Gürtel eingefangen werden. Wegen der Zunahme des Feldes zu den Polen hin entsteht ein magnetischer Spiegel, in dem die Teilchen effizient eingeschlossen werden können. Zusätzlich entsteht im inhomogenen Magnetfeld eine Krümmungsdrift, die dazu führt, dass Elektronen und Protonen in entgegengesetzte Richtung um die Erde driften. Die Verhältnisse sind in Abbildung 7.13 dargestellt.

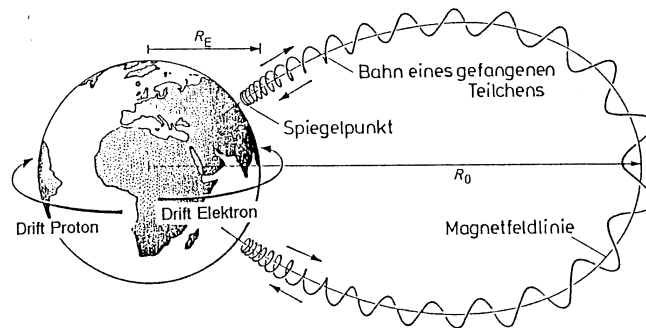


Abbildung 7.13: Teilchenbewegung im Erdmagnetfeld: An den Polen existiert ein magnetischer Spiegel, die Krümmungsdrift führt zu einem Strom in äquatorialer Richtung.

Der so entstehende Strom modifiziert wiederum das Magnetfeld der Erde. Da die Auffüllung des Van-Allen-Gürtels von der Stärke des Sonnenwindes abhängt, variiert das Erdmagnetfeld mit der Aktivität der Sonne (Sonnenflecken). Durch Stöße untereinander können die Teilchen Senkrecht- in Parallelenergie umwandeln und schließlich aus dem Spiegel entkommen; diese Teilchen führen dann beim Eintritt in die Atmosphäre zum Auftreten der Polarlichter.

Eine weitere Bestätigung der Führung geladener Teilchen im Erdmagnetfeld kommt aus Versuchen, bei denen Nuklearwaffen in der Magnetosphäre gezündet wurden: Auf gleicher geographischer Länge wurden dabei nach wenigen Sekunden im Polarbereich künstliche Polarlichter

beobachtet. Sie stammten von Teilchen, welche mit ausreichender Parallelenergie erzeugt wurden. Andere Teilchen, welche im Spiegel gefangen wurden, konnten aufgrund der erheblich langsameren Krümmungsdrift erst nach einigen Stunden auf gleicher Breite aber anderer Länge nachgewiesen werden.

Neben der ersten adiabatischen Invarianten ( $\mu$ ) gibt es eine zweite und dritte, die hier nur kurz erläutert werden sollen.

Zweite Invariante J:

$$J \equiv \oint v_{\parallel} ds = const$$

bedeutet die Invarianz der mittleren Parallelgeschwindigkeit in einem (geschlossenen) Spiegel. Hier ist die Größe  $\langle v_{\parallel} \rangle \cdot L$  konstant.

Die dritte Invariante betrifft den verallgemeinerten Drehimpuls:

$$p_{\Theta} = r^2 \dot{\Theta} + q \cdot r \cdot A_{\Theta} = const$$

$q$  = elektrische Ladung,  $A$  = Vektorpotential

Zusammenfassung: Teilchen in E- und B-Feldern, "Driften"

Teilchen in (nur) B-Feld und mit Senkrechtenergie (Impuls) vollführen Kreisbewegung (Gyration). In Feldrichtung geblickt: Elektronen "rechts-herum", Ionen "links-herum". Mit Lorentzkraft ( $\vec{K} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ ) gleich Zentrifugalkraft folgt:  $r_g = (mv_{\perp}) / qB$  sowie  $\omega_c = qB/m$  ( $c$  steht für (englisch) "Cyclotron-" statt Gyrofrequenz).

Durch Einsetzen der jeweiligen Größen  $m_e$  bzw.  $m_i$  und  $-e$  bzw.  $+Ze$  erhält man die Werte für Elektronen- bzw. Ionengyrofrequenz (Ionen "MHz", Elektronen "GHz"-Bereich).

Betrachtet werden nun Einzelteilchenbahnen (keine Stöße) in B-Feldern unter Einwirkung eines E-Feldes bzw.  $qE$  oder - allgemein - "anderer" Kräfte senkrecht zu B. Es ergeben sich Zykloidenbahnen - d. h. **Kombination** von **Translation** mit der **Driftgeschwindigkeit**  $v_D$  und der **Gyration**.

Man findet für Kräfte senkrecht zum Magnetfeld die **allgemeine Driftformel**  $\vec{v}_D = (\vec{K} \times \vec{B}) / (qB^2)$ . Als Kräfte kommen infrage:  $qE$ ,  $m\nu^2/r$ ,  $mg$ ,  $-\mu \nabla B$ , oder die "Polarisationsdrift" ( $= E \times B$ -Drift im zeitlich veränderlichen E-Feld gibt Trägheitskraft aus der veränderlichen  $v_{E \times B}$ -Bewegung).

Aus  $K = -\mu \nabla B$  resultiert die sogenannte Krümmungsdrift ( $B \nabla B$ -Drift), wird bewirkt durch die Kraftwirkung eines B-Feldgradienten auf ein **magnetisches Moment**  $\mu$ .  $\mu$  ist gegeben durch Kreisstrom des Ions (Elektrons) auf seiner Gyrobahn ( $\mu = I \cdot \pi r_g^2$  bzw.  $= W_{kin,\perp} / (qB)$ ).

Für langsame Veränderungen (Ort, Zeit) ist  $\mu$  eine Erhaltungsgröße  $\rightarrow \mu$ -Erhaltung = **1. adiabatische Invariante**. In diesem Fall sehr einfache Bahnbeschreibung eines Teilchens durch sein Gyrozentrum!

Anwendung der  $\mu$ -Invarianz: **Magnetischer Spiegel** mit  $W_{\perp}/B = \text{const}$  (ohne Stöße). Es folgt Reflektion für Teilchen mit hinreichend hoher  $\perp$ -Energie im Vergleich zu ihrer Gesamtenergie. (Reflektion wenn  $W_{\perp}/W_{\text{tot}} \geq B_{\text{min}}/B_{\text{max}}$  bzw.  $W_{\parallel}/W_{\perp} \leq (B_{\text{max}}/B_{\text{min}})$ ). Im Geschwindigkeitsraum  $v_{\perp}/v_{\parallel}$  folgt der **Verlustkegel**.





# Kapitel 8

## Vielteilchenbeschreibung von Plasmen (kinetische Theorie)

Im vorherigen Kapitel haben wir die Einzelteilchenbeschreibung eines Plasmas kennengelernt. Dabei wurde die Wechselwirkung der Teilchen untereinander vollständig vernachlässigt. Die Vernachlässigung der Wechselwirkung zwischen den Teilchen ist aber selbst in dünnen Plasmen wegen der langreichweitigen Coulomb-Wechselwirkung nicht zulässig. Eine exakte Beschreibung würde allerdings das simultane Lösen der Bewegungsgleichungen für alle Teilchen (in der Größenordnung von  $10^{20}$ ) erfordern. Auf heutigen Hochleistungsrechnern können auf diese Weise Systeme mit bis zu  $10^7$  Teilchen behandelt werden. Besondere Schwierigkeiten bereiten hier die elektromagnetischen Felder, die einerseits auf die Teilchenbewegung einwirken, andererseits aber auch von den geladenen Teilchen erzeugt werden.

Eigentlich interessiert man sich ja aber auch gar nicht für die Bewegung von Einzelteilchen, sondern für gemittelte Größen wie beispielsweise die lokale Dichte, die mittlere Geschwindigkeit usw. Daher ist anstelle einer Beschreibung der einzelnen Teilchen eine statistische Beschreibung möglich.

In der klassischen Mechanik werden Trajektorien einzelner Teilchen durch Ort und Impuls (bzw. Geschwindigkeit) bestimmt. Im Prinzip kann man Gleichungen für  $N$  Teilchen im  $6N$ -dimensionalen Raum  $d^3x_1 d^3\nu_1 d^3x_2 \cdots d^3x_N d^3\nu_N$  aufstellen.

Mit der Einführung einer  $N$ -Teilchen-Verteilungsfunktion

$$f_N(\vec{r}_1, \vec{v}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_N, t) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r}_i - \vec{R}_i(t)) \delta(\vec{v}_i - \vec{V}_i(t))$$

führt dieser Zugang auf die in der statistischen Mechanik bekannte Liouville-Gleichung. Da wir an makroskopischen Größen interessiert sind, müssen wir uns statt mit  $N$  meist nur mit 1 oder 2 Phasenraumkoordinaten befassen. Daher führen wir sogenannte reduzierte Verteilungsfunktionen ein, indem wir über die meisten Phasenraumkoordinaten  $\vec{r}_i$  und  $\vec{v}_i$  abintegrieren:

$$f_s(\vec{r}_1, \vec{v}_1, \dots, \vec{r}_s, \vec{v}_s, t) = \frac{N!}{(N-s)!} \int f_N \prod_{i=s+1}^N d\vec{r}_i d\vec{v}_i$$

Die Normierungskonstante entspricht der Anzahl der Möglichkeiten,  $s$  Teilchen aus einem Ensemble von  $N$  Teilchen auszuwählen. Damit wird deutlich, dass es wegen der Ununterscheid-

barkeit der Teilchen keinen Sinn macht, über ein spezifisches Teilchen zu sprechen. Man macht nur statistische Aussagen, etwa irgendein Teilchen im Phasenraumvolumen  $d^3\vec{r}_1 d^3\vec{v}_1$  zu finden. Wenn man die Bewegungsgleichung für eine solche reduzierte Verteilungsfunktion  $f_s$  aufschreibt findet man, dass diese Gleichung immer auch die jeweils höhere Verteilungsfunktion  $f_{s+1}$  enthält. Das führt auf die sogenannte BBGKY-Hierarchie (Bogolyubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon).

Um verwertbare Ausdrücke zu erhalten, muss man diese Hierarchie abbrechen. Dazu wurde zur Beschreibung von realen Gasen eine sogenannte Clusterentwicklung verwendet. Im Sinne einer Störungsentwicklung nimmt man dabei verschiedene Teilchenkorrelationen mit:

$$f_1(\vec{r}_1, \vec{v}_1, t) \equiv f_1(1)$$

$$f_2(\vec{r}_1, \vec{v}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_2, t) \equiv f_1(1)f_1(2) + g(1, 2)$$

$$f_3(\vec{r}_1, \vec{v}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_2, \vec{r}_3, \vec{v}_3, t) \equiv f_1(1)f_1(2)f_1(3) + f_1(1)g(2, 3) +$$

$$f_1(2)g(1, 3) + f_1(3)g(1, 2) + h(1, 2, 3)$$

+ ...

Diese Hierarchie lässt sich folgendermaßen verstehen:

Wenn Teilchen statistisch unabhängig voneinander wären, ließe sich die Zwei-Teilchen-Verteilungsfunktion als Produkt von zwei Ein-Teilchen-Verteilungsfunktionen schreiben. Die sogenannte Paar-Verteilungsfunktion  $g$  ist ein Maß für die Abweichung von dieser Näherung. Die Hierarchie wird dann an geeigneter Stelle abgebrochen, beispielsweise kann man in einem nicht zu dichten Gas Dreier-Stöße vernachlässigen und bricht daher die Hierarchie nach der zweiten Gleichung ab. Für ein Plasma ergeben sich bei einer solchen Behandlung Probleme: hier sind wegen der langreichweitigen Coulomb-Wechselwirkung immer viele Teilchen miteinander in Wechselwirkung.

Dieses Problem kann man lösen, indem man die Wechselwirkung aufspaltet in einen Teil, der für alle Teilchen identisch ist (mittleres Feld) und einen kurzreichweitigen Anteil. Das mittlere Feld kann man dann wie ein externes Feld behandeln. Der kurzreichweitige Anteil der Wechselwirkung beschreibt die "echten" Teilchenstöße. Für ein ideales Plasma kann man beispielsweise die Stöße zwischen den Plasmateilchen vernachlässigen.

## Kinetische Gleichungen

Mit der Ein-Teilchen-Verteilungsfunktion können wir die lokale Dichte der Teilchen einer Sorte  $\alpha$  zu einem Zeitpunkt  $t$

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = n_\alpha(\vec{r}, t) \hat{f}_1(\vec{r}, \vec{v}, t),$$

sowie die Zahl der Teilchen dieser Sorte im Phasenraumvolumen  $d^3\vec{r}d^3\vec{v}$ :  $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{r}d^3\vec{v}$

bestimmen. Betrachten wir nun ein System, in dem die Teilchenzahl erhalten bleibt, dann erfolgt die ‘‘Bewegung’’ der Teilchen im 6-dimensionalen Phasenraum so, dass

$$\frac{d}{dt} \int f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3r d^3v = 0$$

erfüllt ist. Wenn es keine Teilchenquellen und Senken im System gibt, folgt daraus sofort

$$\frac{d}{dt} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0$$

Die zeitliche Ableitung ist hier entlang der Phasentrajektorie zu nehmen, d. h.

$$\frac{d\hat{f}_\alpha}{dt} = \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial t} + \nabla \hat{f}_\alpha \frac{dx}{dt} + \nabla_\nu \hat{f}_\alpha \frac{dv}{dt} = 0$$

wobei  $\nabla_\nu$  der Gradient im Geschwindigkeitsraum ist. Diese Gleichung ist von der Form einer 6-dimensionalen Kontinuitätsgleichung. Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen  $\dot{x} = v$  und  $\dot{v} = F/m$  erhalten wir schließlich

$$\frac{d\hat{f}_\alpha}{dt} = \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial t} + v \cdot \nabla \hat{f}_\alpha + \frac{q}{m} \left( \hat{E} + \vec{v} \times \hat{B} \right) \nabla_\nu \hat{f}_\alpha = 0$$

Die hier eingeführten Felder  $\hat{E}, \hat{B}$  sind dabei die exakten Felder am Ort der Teilchen. Diese müssen im Prinzip selbstkonsistent aus den Maxwell-Gleichungen berechnet werden, in die als Quellen die Teilchen eingehen. Um zu einem lösbaren System zu kommen, spalten wir wie oben diskutiert die Felder  $\hat{E}$  und  $\hat{B}$  in einen makroskopischen Teil  $E$  bzw.  $B$  und einen mikroskopischen Teil  $\delta E, \delta B$  auf. Da die Wechselwirkung der Teilchen in einem lokalisierten Volumen (z. B. innerhalb der Debye-Kugel) stattfindet, wird sie durch die mikroskopischen Felder bestimmt. Dagegen wird das makroskopische Feld aus den über den Geschwindigkeitsraum gemittelten Größen Strom  $j$  und Ladungsdichte  $\rho$  an Hand der Maxwell-Gleichungen berechnet:

$$j = \sum_\alpha q_\alpha \int v f_\alpha d^3v, \quad \rho = \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha d^3v$$

Man erhält so eine neue Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q}{m} (E + v \times B) \nabla_\nu f_\alpha = \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{Stoss}$$

Dabei enthält die linke Seite lediglich gemittelte Größen, während auf der rechten Seite im sogenannten *Stoßterm* alle mikroskopischen Größen auftreten. Das Problem der Beschreibung der Vielteilchenwechselwirkung ist somit auf die Bestimmung eines Ausdrucks für den Stoßterm verschoben worden. Die so gewonnene Gleichung wird auch als *kinetische Gleichung* bezeichnet; je nach Ansatz für den Stoßterm ergeben sich unterschiedliche Formen der kinetischen Gleichung.

Für niedrige Teilchendichten wird der Stoßterm klein, und man macht die einfache Näherung  $(\partial f_\alpha / \partial t)_{Stoss} = 0$ . Die so erhaltene kinetische Gleichung wird als *Vlasov-Gleichung* bezeichnet. Trotz der sehr idealisierten Annahme der völligen Stoßfreiheit findet die Vlasov-Gleichung vor allem Anwendung bei der Beschreibung kinetischer Effekte bei Wellenphänomenen in Plasmen. Dazu löst man das Gleichungssystem bestehend aus der Vlasov-Gleichung sowie den

Maxwell-Gleichungen für die selbstkonsistenten Felder  $E, B$  mit  $\rho, j$  als Quelle. Das nachfolgende Beispiel soll dies verdeutlichen.

Wir betrachten die in Kap. 1 untersuchte elektrostatische Plasmaschwingung mit Hilfe der Vlasov-Gleichung ohne Magnetfeld. Im Bereich von  $\omega_p$  können wir die Bewegung der Ionen vernachlässigen und betrachten nur die Verteilungsfunktion der Elektronen. Die elektrostatische Schwingung breitet sich längs der  $x$ -Achse aus, d. h. es handelt sich um ein eindimensionales Problem. Weiterhin sei die Störung durch das elektrische Feld klein. Dann können wir  $f = f_0 + f_1$  annehmen, wobei  $f_0$  die ungestörte Verteilungsfunktion ist. Mit  $E = 0 + E_1$  (im Gleichgewicht existiert kein  $E$ -Feld) erhalten wir in erster Ordnung die Vlasov-Gleichung für die gestörte Verteilungsfunktion

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{e}{m_e} E_1 \frac{\partial f_0}{\partial v_x} = 0$$

Wir setzen nun die gestörten Größen als ebene Wellen an (Fourierzerlegung), d. h.

$$E_1 = \tilde{E} e^{i(kx - \omega t)}, \quad f_1 = \tilde{f} e^{i(kx - \omega t)}$$

Mit diesem Ansatz erhalten wir

$$f_1 = \frac{ie}{m_e} \frac{1}{\omega - kv_x} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} E_1$$

Das gestörte elektrische Feld  $E_1$  berechnen wir aus der Poisson-Gleichung und erhalten mit obigem Fourier-Ansatz:

$$\frac{dE_1}{dx} = ikE_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{e}{\epsilon_0} n_1 = -\frac{e}{\epsilon_0} \int f_1 dv_x,$$

wobei wir die gestörte Dichte durch die Verteilungsfunktion ausgedrückt haben. Wir können nun den Ausdruck für die gestörte Verteilungsfunktion hier einsetzen und erhalten (nach Kürzen durch  $E_1$  und mit der Definition für die Plasmafrequenz

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{n_0 k^2} \int \frac{\partial f_0 / \partial v_x}{\frac{\omega}{k} - v_x} dv_x$$

Diese Gleichung gibt eine Beziehung zwischen  $\omega$  und  $k$  an; sie ist daher die Dispersionsrelation für die elektrostatische Schwingung. Das Integral in obiger Gleichung ist wegen des Pols auf der  $v_x$ -Achse nicht einfach auszuwerten. Eine genauere Betrachtung ergibt für den Fall einer Maxwell-Verteilung von  $f_0$  die Lösung

$$\omega = \omega_p \left(1 + 3k^2 \lambda_D^2\right)^{1/2} - i \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{(k\lambda_D)^3} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2 \lambda_D^2} + 3\right)}$$

Im Gegensatz zur einfachen, im Einführungskapitel hergeleiteten Beziehung  $\omega = \omega_p \neq f(k)$  liegt jetzt für  $T \neq 0$  tatsächlich Dispersion, d. h. eine Abhängigkeit der Frequenz von der Wellenlänge vor. Zusätzlich hat  $\omega$  auch einen Imaginärteil, d. h. es tritt Dämpfung auf, obwohl in der Vlasov-Gleichung keine Stöße berücksichtigt wurden. Diese dissipationsfreie Dämpfung (die Entropie des Systems bleibt unverändert) wird nach ihrem Entdecker als Landau-Dämpfung bezeichnet. Dieser Effekt kann nur mit Hilfe der kinetischen Theorie richtig beschrieben

werden. Er bildet die Grundlage für viele Absorptionsphänomene elektromagnetischer Wellen im Plasma. Für Verteilungsfunktionen, bei denen  $\partial f_0 / \partial v_x$  im Bereich der Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = \omega/k$  positiv ist, ergibt sich ein positiver Imaginärteil, d. h. die Welle kann Energie aus dem Plasma aufnehmen.

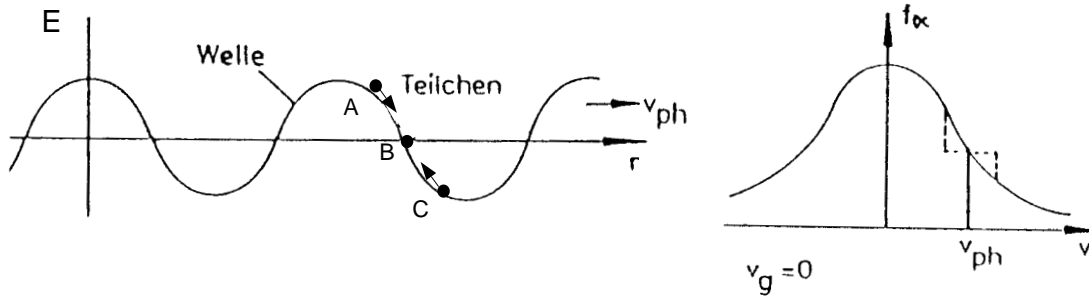


Abbildung 8.1: Landaudämpfung im Bild des Einzelteilchens. Beschleunigung von Teilchen mit  $v < v_{ph}$  (A) bzw. Abbremsung solcher mit  $v > v_{ph}$  (C) führt zur Abflachung der Verteilungsfunktion bei  $v = v_{ph}$ . Nur Teilchen mit  $v = v_{ph}$  erfahren keine beschleunigende Kraft (B).

Anschaulicher stellt sich die Landaudämpfung im Bezugssystem der Teilchen mit  $v \approx v_{ph}$  dar: Ein Teilchen, das sich genau mit der Phasengeschwindigkeit bewegt, sieht im Mittel gerade kein elektrisches Feld. Ein etwas langsames Teilchen wird vom elektrischen Feld beschleunigt, ein schnelleres Teilchen abgebremst. Dies ist in gewisser Weise analog dem Wellenreiter, der mit der Wellengeschwindigkeit mitläuft. Für  $(\partial f_0 / \partial v_x)_{v_{ph}} < 0$  werden mehr Teilchen beschleunigt als abgebremst; die Welle überträgt Energie auf die Teilchen (Dämpfung). Die umgekehrte Situation liegt bei  $(\partial f_0 / \partial v_x)_{v_{ph}} > 0$  vor. Wie in Abbildung 8.1 zu erkennen ist, führt die Landaudämpfung zu einer Abflachung der Verteilungsfunktion im Bereich der Phasengeschwindigkeit.

*Diese Erklärung ist zwar sehr anschaulich, strengenommen ist sie aber nur richtig für ausreichend große Amplitude der betrachteten Welle (diese muss so groß sein, dass das betrachtete Teilchen im Potential der Welle gefangen ist), das widerspricht aber den Annahmen unserer Ableitung (lineare Theorie).*

Berücksichtigt man die Teilchenstöße in der kinetischen Gleichung, so gibt es unterschiedliche Ansätze für den Stoßterm. Unter der Annahme, dass vorwiegend lokalisierte Zweierstöße zur Ablenkung der Teilchenbahnen führen, leitete Boltzmann den nach ihm benannten Stoßansatz her:

$$\left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}} = \int (f_\alpha(v'_\alpha) f_\beta(v'_\beta) - f_\alpha(v_\alpha) f_\beta(v_\beta)) |\nu_\alpha - \nu_\beta| \sigma_{\alpha\beta} d^3 \nu_\beta$$

Er beschreibt die Veränderung der Verteilungsfunktion der Teilchensorte  $\alpha$  durch Stoß mit der Sorte  $\beta$ , wobei die gestrichelten Größen die Geschwindigkeiten nach dem Stoß darstellen. Der erste Term beschreibt den Zuwachs im Geschwindigkeitselement  $d^3 \nu'_\alpha$ , der zweite den Verlust aus dem Element  $d^3 \nu_\alpha$ . Die Änderung der Verteilungsfunktion ist somit proportional zur Relativgeschwindigkeit der Stoßpartner, dem Stoßquerschnitt  $\sigma_{\alpha\beta}$  (der selbst wieder abhängt

von der Relativgeschwindigkeit der Stoßpartner) sowie der Wahrscheinlichkeitsdichte, dass die beiden Stoßpartner mit den entsprechenden Geschwindigkeiten sich gerade am gleichen Ort befinden. Der Stoßterm führt offensichtlich zur Thermalisierung, denn er verschwindet nur im thermodynamischem Gleichgewicht. Setzt man diesen Stoßterm als rechte Seite der kinetischen Gleichung an, so ergibt sich die *Boltzmann-Gleichung*. Sie wird z. B. bei der Beschreibung neutraler Gase verwendet.

Wie bereits oben diskutiert, ist in Plasmen wegen der langreichweitigen Coulomb-Wechselwirkung die Annahme lokalisierter Zweierstöße nicht erfüllt. Bereits im dünnen Plasma wird das Wechselwirkungspotential der beiden Stoßpartner (und damit der Stoßquerschnitt) durch die Anwesenheit weiterer geladener Teilchen modifiziert (Debye-Abschirmung). Dieser Effekt wird durch die Zwei-Teilchen-Verteilungsfunktion beschrieben: Für große Teilchenabstände lässt sich die Zwei-Teilchen-Verteilungsfunktion als Produkt zweier Ein-Teilchen-Verteilungsfunktionen schreiben, d. h. die Teilchen sind statistisch unabhängig. Für Abstände kleiner als die Debye-Länge ist aber die Wahrscheinlichkeit, in der Nähe eines Testteilchens weitere Teilchen mit gleicher Ladung zu finden, verringert. Im Rahmen der Debye-Theorie ist die Zwei-Teilchen-Verteilungsfunktion gegeben durch:

$$f_2(x_1, \nu_1; x_2, \nu_2) = f_1(x_1, \nu_1) f_1(x_2, \nu_2) e^{-qU(|x_1-x_2|)/(k_B T)}$$

$$U(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left( e^{-\frac{r}{\lambda_D}} \right)$$

Die Debye-Theorie geht allerdings von der Annahme aus, dass die Teilchen sich unendlich schnell in der Debye-Wolke anordnen. Diese Näherung ist natürlich nur anwendbar, wenn langsam veränderliche Vorgänge betrachtet werden. Selbst unter dieser Annahme wird nur die Abschirmung der Ionen durch die Elektronen gut beschrieben. Eine Korrektur wegen der endlichen Teilchengeschwindigkeiten ist in jedem Fall für die Wechselwirkung zwischen gleich schweren Teilchen zu erwarten.

Unter Berücksichtigung der Debye-Abschirmung muss man neben der kinetischen Gleichung für die Ein-Teilchen-Verteilungsfunktion eine Gleichung für die Zwei-Teilchen-Verteilungsfunktion aufschreiben, wobei der Stoßterm nun die gleichzeitige Wechselwirkung mit einem dritten Teilchen beschreibt. Für nicht allzu dichte Plasmen ist dieser Term vernachlässigbar.

Mit der Einführung der Debye-Abschirmung haben wir allerdings nur ein Problem gelöst, das die Anwendbarkeit der Boltzmann-Gleichung für Plasmen verhindert. Ein weiteres Problem ist, dass die Boltzmann-Gleichung nur solche Stöße betrachtet, die zu großen Geschwindigkeitsänderungen führen. Wir hatten aber bereits im Kapitel 2 gelernt, dass für Plasmen mit vielen Teilchen im Debye-Volumen solche Stöße kaum eine Rolle spielen. In diesen Plasmen sind vor allem Kleinwinkelstöße von Bedeutung. Solche Stöße ändern die Geschwindigkeit nur langsam. Daher wird der Stoßterm in einer kinetischen Gleichung für Plasmen, der Fokker-Planck-Gleichung, als Diffusionsterm im Geschwindigkeitsraum aufgefasst. Ein solcher Diffusionsterm wirkt ähnlich wie Diffusion im Ortsraum. Wenn man einen einfachen "random walk"-Ansatz macht (siehe Kapitel 4) schreibt man für den Diffusionskoeffizienten statt  $D = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta x^2 \rangle}{\Delta t}$  beispielsweise  $D_v = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta v_x^2 \rangle}{\Delta t}$ . Qualitativ kann man sich dann die Abbremsung eines monoenergetischen Teilchenstrahls im Geschwindigkeitsraum, wie in der Abbildung 8.2 skizziert, vorstellen:

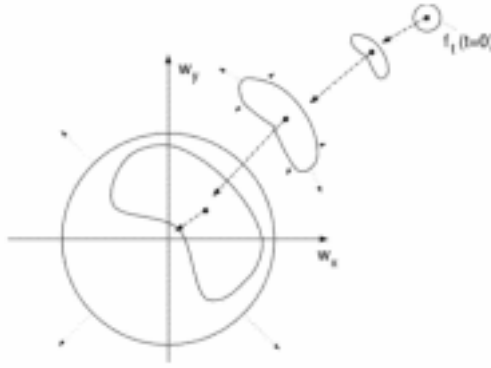


Abbildung 8.2: Die Abbremsung eines monoenergetischen Teilchenstrahls führt zur Isotropisierung im Geschwindigkeitsraum.

Der Teststrahl startet zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit vorgegebenen Geschwindigkeitskomponenten in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Die Abbremsung am Plasma führt zu einer Reduktion des Betrags der Geschwindigkeit. Gleichzeitig führen die Stöße zu einer Isotropisierung im Geschwindigkeitsraum. Für eine genauere Betrachtung muss man natürlich den entsprechenden Coulomb-Stoßquerschnitt unter Berücksichtigung der Debye-Abschirmung verwenden. Für die Abbremsung eines Teststrahls an einem thermischen Plasma erhält man als Reibungskraft

$$\vec{R}_{t,z} = m_t \frac{d}{dt} \sum_{t_i} \delta \vec{v}_{t,z} = \frac{e_i^2 e_b^2}{4\pi \varepsilon_0} \ln \Lambda \frac{n_t}{m_{tb}} \nabla_{v_t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_b(\vec{v}_b)}{|\vec{v}_b - \vec{v}_t|} d\vec{v}_b$$

Die Abbremskraft eines monoenergetischen Teilchenstrahls (aus Elektronen bzw. Ionen) als Funktion von seiner Geschwindigkeit ist in Abbildung 8.3 zu sehen. Links ist die Abbremsung eines Elektronenstrahls an einem thermischen Plasma ( $T_e = T_i$ ) demonstriert, wobei das Massenverhältnis künstlich auf  $m_i/m_e = 25$  verringert worden ist. Für kleine Geschwindigkeiten des Teststrahls erfolgt die Abbremsung fast ausschließlich an den thermischen Ionen. Das Maximum der abbremsenden Kraft für Abbremsung an den Ionen liegt wie erwartet bei etwa  $\frac{1}{5} \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}}$ , wenn die Geschwindigkeit des Teststrahls etwa gleich der thermischen Ionen-geschwindigkeit ist. Für Geschwindigkeiten nahe der thermischen Elektronengeschwindigkeit wird auch die Abbremsung an den Elektronen wichtiger und dominiert schließlich. Ein analoges Bild ergibt sich für die Abbremsung eines Ionenstrahls am thermischen Plasma. Diese Überlegungen sind wichtig bei der Heizung von Plasmen. Man findet daraus nämlich beispielsweise, dass die bei der Fusion erzeugten  $\alpha$ -Teilchen wegen ihrer hohen Energie vor allem die Elektronen des Plasmas heizen. Die zur Fusion nötige Ionentemperatur erhält man nur durch Elektronen-Ionen-Stöße, die schließlich zum thermischen Plasma ( $T_e = T_i$ ) führen.

Wir hatten oben diskutiert, dass wir neben der Abbremsung des Teststrahls auch eine Isotropisierung der Geschwindigkeitsverteilung erwarten. Diese ist am effektivsten wenn die Masse der Teilchen des Teststrahls viel kleiner ist als die der Hintergrundteilchen (da es hier auf die Impulsänderung ankommt). Wir betrachten einen Teststrahl mit ausschließlich paralleler Energie. Für große Energien findet man für das Verhältnis der Änderung von Parallel- und Senkrechtenergie:

$$\frac{\delta W_{\perp}}{\delta W_{\parallel}} \approx -\frac{m_b}{m_b + m_t}$$

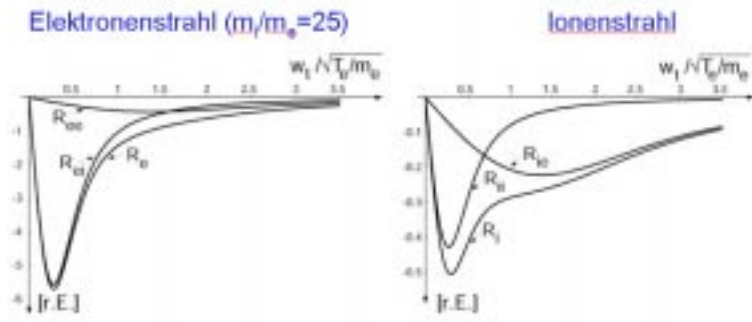


Abbildung 8.3: Abbremsung eines Teststrahls im thermischen Plasma als Funktion seiner Geschwindigkeit  $w_z$  (normiert auf die thermische Geschwindigkeit des Plasmas  $\sqrt{k_B T / m_e}$ ).

In Abbildung 8.4 ist die zeitliche Änderung der Parallel- und Senkrechtenergie für einen monoenergetischen Teilchenstrahl durch Wechselwirkung mit einem thermischen Plasma für verschiedene Zeiten (normiert auf die Stoßzeit) dargestellt. Links ist der Fall eines Strahls aus leichten Teilchen zu sehen. Hier findet man eine isotrope Geschwindigkeitsverteilung bereits deutlich bevor der Teststrahl auf thermische Geschwindigkeit abgebremst wird. Für den Fall sehr schwerer Teilchen im Teststrahl wird dieser zwar abgebremst, aber der Impulsaustausch ist gering, sodass in diesem Fall zunächst die Abbremsung überwiegt und eine isotrope Geschwindigkeitsverteilung erst nach vollständiger Abbremsung erreicht wird.

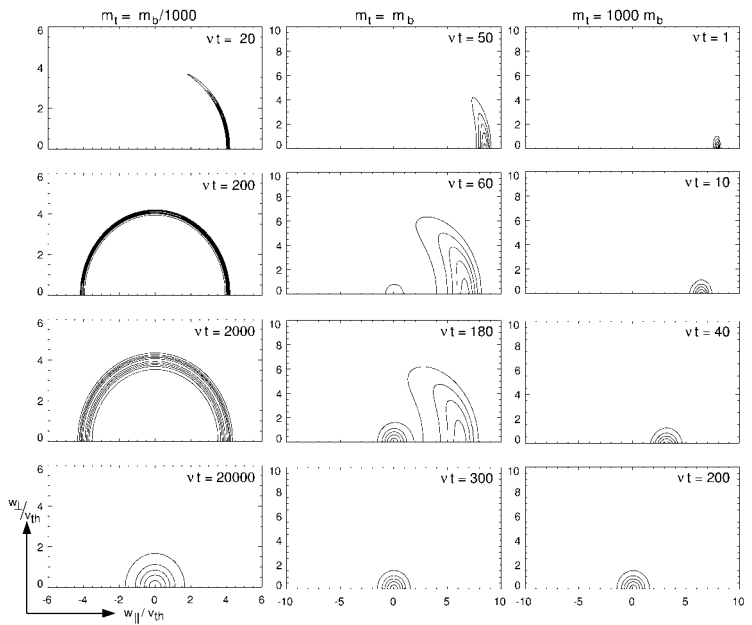


Abbildung 8.4: Änderung von Parallel- und Senkrechtenergie bei Abbremsung eines monoenergetischen Teilchenstrahls an einem Plasma für unterschiedliches Massenverhältnis der Testteilchen zu den Hintergrundteilchen  $m_t / m_b$

Bisher haben wir nur elastische Stöße betrachtet. Allerdings können in nicht vollständig ionisierten Plasmen auch inelastische Stöße zu einer Umverteilung im Geschwindigkeits- (bzw. Energie-) Raum führen. Wir betrachten im Folgenden ein stationäres, magnetfeldfreies, homogenes ( $\partial f / \partial r = 0$ ) Plasma. Dann wird die Elektronen-Energie-Verteilungsfunktion nur durch



Quellen und Senken im Energieraum bestimmt, d. h. durch die inelastischen Stöße und mögliche Heizterme. Oberhalb der Energieschwelle für inelastische Stoßprozesse (Anregung, Ionisation) werden Elektronen “vernichtet”. Dabei “entstehen” Elektronen mit geringer Energie. Falls man zusätzlich Heizung betrachtet, werden dadurch (je nach Heizmethode) Teilchen aus einem bestimmten Energiebereich beschleunigt. Die durch die inelastischen Stöße bedingten Verluste für hohe Energien können durch elastische Stöße aufgefüllt werden. Bei ausreichendem Ionisationsgrad sind Coulomb-Stöße (Elektron-Elektron-Stöße) dazu auch in der Lage. Bei zu geringem Ionisationsgrad ( $< 1\%$ ) allerdings reichen die elastischen Elektronen-Neutralteilchenstöße wegen der geringen Stoßfrequenz bei hohen Elektronenenergien dafür nicht aus. Für Niedertemperaturplasmen (d. h. die meisten technischen Plasmen) folgt daraus der typische Einbruch der Verteilungsfunktion bei Energien, die für elastische Stöße ausreichen.

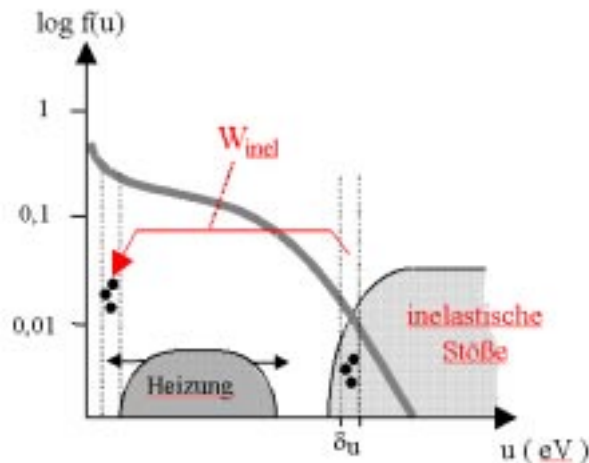
Auch für die oben beschriebene Situation folgt wieder eine Diffusionsgleichung im Geschwindigkeitsraum.

$$\frac{\partial}{\partial u} (D_u(u, r)) \frac{\partial f(u, r)}{\partial u} = \sum_i (u \cdot \nu_i(u) \cdot f(u) - (u + u_i) \cdot \nu_i(u + u_i) \cdot f(u + u_i))$$

( $u_i$ : Energieverlust durch inelastische Stöße,  $\nu_i$ : Stoßfrequenz für inelastische Stöße).

Der Stoßterm auf der rechten Seite beschreibt die Energieänderung durch die inelastischen Stöße. Die Elektron-Elektron-Stöße (vorher in der Fokker-Planck-Gleichung betrachtet) sind unter Annahme eines niedrigen Ionisationsgrades hier vernachlässigt. Die linke Seite enthält die Heizung, die im Diffusionskoeffizienten enthalten ist. Abbildung 8.5 zeigt eine entsprechend berechnete Verteilungsfunktion für ein Argonplasma.

Abbildung 8.5: Veränderung der Energieverteilungsfunktion der Elektronen durch inelastische Stöße



In Abbildung 8.6 erkennt man den starken Abfall der Anzahl der höher energetischen Elektronen im Vergleich zur Maxwell-Verteilung. Im Bereich der Ionisierungsenergie “fehlen” bereits einige Zehnerpotenzen, d. h. bezüglich der Ionisation ist das Plasma nur so effizient wie ein deutlich kälteres, aber Maxwell’sches Plasma. Im niederenergetischen Teil wären die Elektronen dagegen sogar etwas “heißer” als es der mittleren Energie entspricht (flachere Steigung der Elektronen-Energieverteilung!).

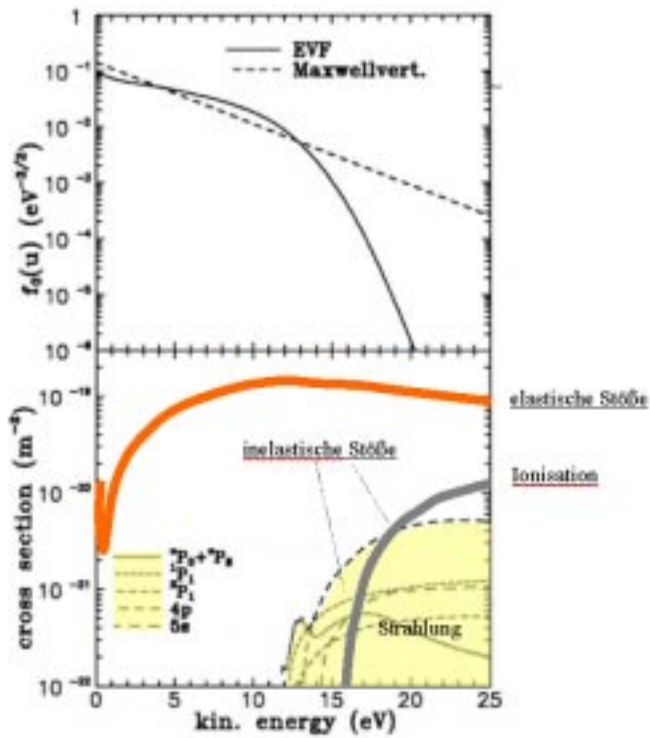


Abbildung 8.6: Abweichung der Elektronen-Energieverteilung von der Maxwell-Verteilung aufgrund inelastischer Stöße

# Kapitel 9

## Flüssigkeitsbeschreibung von Plasmen

Im vorigen Kapitel haben wir die kinetische Beschreibung von Plasmen kennengelernt. Das ist, insbesondere für die heißen Fusionsplasmen die bestmögliche Beschreibung. Kinetische Gleichungen müssen insbesondere dann gelöst werden, wenn kinetische Effekte, d. h. Resonanzen im Geschwindigkeitsraum wie beispielsweise bei der Landau-Dämpfung, eine Rolle spielen. Wenn man nach einer einfacheren Beschreibung sucht, bietet sich eine makroskopische Beschreibung an, die analog ist zur Flüssigkeitsbeschreibung für Gase oder Flüssigkeiten.

Allerdings hat man in Plasmen das Problem, dass man es eigentlich nicht mit einer Flüssigkeit, sondern wenigstens mit zwei Flüssigkeiten zu tun hat, denn Elektronen und Ionen haben eine sehr unterschiedliche Masse und daher unterschiedliche charakteristische Zeiten. Dennoch wird, wie unten gezeigt, oftmals eine Einflüssigkeitsbeschreibung, die Magnetohydrodynamik (MHD), verwendet. Die Ableitung der entsprechenden Flüssigkeitgleichungen sowie eine Diskussion ihres Gültigkeitsbereiches wird im Folgenden gegeben.

Wir starten von der kinetischen Gleichung

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f_\alpha = \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}},$$

betrachten im Folgenden aber nicht die Verteilungsfunktion selbst, sondern ihre Momente

$$\int (\vec{v})^k \cdot f_\alpha(\vec{v}, \vec{r}, t) d\vec{v}.$$

Durch Integration über die Teilchengeschwindigkeiten haben wir nun die im vorigen Kapitel diskutierten kinetischen Effekte (unterschiedliche Reaktion von Teilchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten auf externe Felder) vernachlässigt. Aus den ersten Momenten der Verteilungsfunktion kann man die folgenden makroskopischen Größen erhalten:

Teilchendichte (k=0):  $n_\alpha(\vec{r}, t) \equiv \int (\vec{v})^0 \cdot f_\alpha(\vec{v}, \vec{r}, t) d\vec{v}$

Schwerpunktsgeschwindigkeit (k=1):  $\vec{u}_\alpha(\vec{r}, t) \equiv \int (\vec{v})^1 \cdot f_\alpha(\vec{v}, \vec{r}, t) d\vec{v} / n_\alpha(\vec{r}, t)$

Mit Hilfe der Schwerpunktsgeschwindigkeit lässt sich die thermische Geschwindigkeit der Teilchen als  $\vec{v} - \vec{u}_\alpha$  ausdrücken. Sie beschreibt den mit thermischen Fluktuationen verbundenen Anteil der Teilchengeschwindigkeit. Der Mittelwert dieser Größe verschwindet. Dies ermöglicht die Definition der Temperatur.

Temperatur ( $k=2$ ):  $k_B T_\alpha(\vec{r}, t) \equiv \frac{m_\alpha}{3} \int (\vec{v} - \vec{u}_\alpha)^2 \cdot f_\alpha(\vec{v}, \vec{r}, t) d\vec{v} / n_\alpha(\vec{r}, t)$

Die so definierten Größen gelten für jeweils eine Teilchensorte  $\alpha$ . Sie sind lokale Größen, d. h. man geht davon aus, dass das Verhalten des Plasmas ausreichend lokalisiert ist (Größen an unterschiedlichen Orten sind unabhängig voneinander). Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn die mittlere freie Weglänge der Teilchen klein gegen die Skalenlänge der zu untersuchenden Prozesse ist

$$\lambda_c \ll L_H$$

Außerdem dürfen nur Prozesse betrachtet werden, die langsamer ablaufen als die durch die Stoßprozesse bestimmte Zeitskala. Da der Energieaustausch zwischen den Ionen langsamer ist als der zwischen den Elektronen, bedeutet das  $\tau_{ii} \ll \tau_H$ .

Mit diesen Forderungen werden auch die Grenzen der Flüssigkeitsbeschreibung deutlich: insbesondere in den stoßfreien Plasmen wie in der Fusionsforschung wird eine Flüssigkeitsbeschreibung problematisch. Dieses Problem wird in Teil II der Vorlesung ausführlicher diskutiert.

Wir wollen im Folgenden die ersten Momente der kinetischen Gleichung bilden. Aus dem 0. Moment findet man die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha) = 0.$$

die besagt, dass sich die Teilchendichte im Plasma nur durch Kompression oder Strömung ändern kann. (Der Stoßterm im 0. Moment der kinetischen Gleichung verschwindet wegen Energie- und Impulserhaltung).

Multipliziert man die kinetische Gleichung mit  $m_\alpha$  und bildet das 1. Moment, folgt (unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung) die sogenannte Kraftgleichung (hier für ein isotropes Plasma):

$$m_\alpha n_\alpha \left( \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha \right) - q_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - n_\alpha m_\alpha \vec{g} + \nabla \cdot P_\alpha = \vec{R}_{\alpha\beta}$$

Diese Gleichung besagt, dass die Beschleunigung eines Volumenelementes gerade durch die Summe der äußeren Kräfte gegeben ist. In der Hydrodynamik ist sie als Euler-Gleichung bekannt. Die zeitliche Ableitung ist im ortsfesten System ausgedrückt. Zeitliche Änderung einer Größe kann somit sowohl durch explizite Zeitabhängigkeit ( $\partial/\partial t$ ), als auch durch Strömen mit der Flüssigkeit ( $\vec{u}_\alpha \cdot \nabla$ ) bewirkt werden. Diese sogenannte *konvektive Ableitung* erhält man auch aus dem totalen Differential:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla$$

Die Integration über den Stoßterm führt auf den Ausdruck:

$$\vec{R}_{\alpha\beta}(\vec{r}, t) = m_\alpha \int \vec{\omega}_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}} d\vec{\omega}_{\alpha\beta} = 0$$

$$(\vec{\omega}_{\alpha\beta} = \vec{v}_{\alpha}(\vec{r}, t) - \vec{v}_{\beta})$$

Wegen “actio = reactio” gilt natürlich  $\vec{R}_{\alpha\beta} = -\vec{R}_{\beta\alpha}$

Eine Betrachtung der Momentengleichungen zeigt, dass das Gleichungssystem nicht geschlossen ist: In der  $k$ -ten Momentengleichung taucht jeweils ein  $k+1$ -tes Moment auf. Um zu einem geschlossenen System zu kommen, muss man daher weitere Annahmen machen. Bricht man z. B. bei  $k = 1$  ab, so muss eine Gleichung für den Druck hinzugenommen werden. Dies kann durch die Annahme eines adiabatischen Verhaltens geschehen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{n^{\gamma}} \right) = 0$$

wobei  $\gamma$  der Adiabatenkoeffizient ist (z. B.  $\gamma=5/3$  im idealen Gas mit drei Freiheitsgraden).

Damit haben wir die wesentlichen Gleichungen für eine Mehrflüssigkeitsbeschreibung (verschiedene Flüssigkeitssorten  $\alpha$ ) abgeleitet. Für ein Plasma muss man natürlich zusätzlich die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{und}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

lösen.

Im Folgenden wollen wir unsere Gleichungen noch weiter vereinfachen und zu einer Ein-Flüssigkeitsbeschreibung übergehen. Dazu muss man eine weitere Annahme machen: die Flüssigkeiten und Felder variieren auf den gleichen Zeit- und Längenskalen. Wegen der Trägheit der Ionen kann das bei einer Ein-Flüssigkeitsbeschreibung nur die Ionenskala sein. Damit werden also im Folgenden alle Effekte, die speziell die Elektronen betreffen, vernachlässigt. Wir können uns daher auf eine nicht-relativistische Beschreibung

$$\frac{\omega}{k} \sim \frac{L_H}{\tau_H} \sim u_i \ll c$$

beschränken und den Verschiebungsstrom in den Maxwell-Gleichungen vernachlässigen. (Wenn wir uns später mit den Plasmawellen beschäftigen, ist dieser Zugang nicht mehr gerechtfertigt.) Die Beschränkung auf eine einzige Flüssigkeit schränkt natürlich die Gültigkeit unserer Theorie weiter ein. Wir haben nur eine Temperatur, d. h.  $T_e = T_i$ . Das bedeutet, dass auf den betrachteten Zeitskalen Energieaustausch zwischen Elektronen und Ionen möglich ist. Für die betrachteten Zeitskalen folgt daher

$$\tau_{ii} \ll \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \tau_H$$

Für ein Wasserstoffplasma ( $Z = 1$ ) wollen wir im Folgenden das System der zwei Flüssigkeiten (Ionen und Elektronen) zu einer Flüssigkeit zusammenfassen. Dazu definiert man die Massendichte  $\rho$ , die Schwerpunktschwindigkeit  $\vec{v}$  und die elektrische Stromdichte  $\vec{j}$  gemäß

$$\rho = m_i n_i + m_e n_e \approx m_i n$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho} (m_i n_i \vec{u}_i + m_e n_e \vec{u}_e) \approx \vec{u}_i$$

$$\vec{j} = en (\vec{u}_i - \vec{u}_e)$$

wobei wir die Quasineutralität ( $n_i = n_e = n$ ) und  $m_e \ll m_i$  ausgenutzt haben. In diesem Ein-Flüssigkeitsmodell ergibt sich die Kontinuitätsgleichung als

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Die Addition der Kraftgleichungen für Elektronen und Ionen ergibt:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} (+\rho \vec{g})$$

Wegen  $\vec{R}_{ei} = -\vec{R}_{ie}$  taucht die Reibung hier nicht auf.

Bei der Ableitung dieser Gleichung wurde wieder  $m_e \ll m_i$  benutzt, also die Elektronenträgheit vernachlässigt. Wir finden aus der Kraftgleichung also, dass im statischen Fall ein Druckgradient gerade durch Ströme senkrecht zum Magnetfeld (und gegebenenfalls durch Gravitation) kompensiert wird. Das ist die Grundlage für die Existenz von MHD-Gleichgewichten in Sternen (Gravitation) und beim magnetischen Einschluss von Plasmen.

Eine weitere Gleichung erhalten wir, wenn wir von der Kraftgleichung für die Elektronen ausgehen

$$m_e n_e \left( \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \nabla) \vec{u}_e \right) + en_e (\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) + \nabla p_e = \vec{R}_{ei}$$

und die Schwerpunktschwindigkeit der Elektronen mit

$$\vec{u}_e = (\vec{u}_e - \vec{u}_i) + \vec{u}_i = -\frac{\vec{j}}{en} + \vec{u}$$

durch die Ein-Flüssigkeitsvariablen ausdrücken. Unter Ausnutzung der Kraftgleichung, von  $m_e \ll m_i$  und der Definition der Resistivität  $\eta j = \frac{R_{ei}}{en_e}$  erhält man das sogenannte verallgemeinerte Ohmsche Gesetz:

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{j} + \frac{1}{en_e} (\vec{j} \times \vec{B}) - \frac{1}{en_e} \nabla p + \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{d\vec{j}}{dt}$$

Zusätzlich zu dem bekannten Ohmschen Gesetz wird ein elektrisches Feld nicht nur durch endlichen Widerstand, sondern auch durch Plasmabewegung senkrecht zum Magnetfeld (zweiter Term auf der linken Seite), einen Strom senkrecht zum Magnetfeld (2. Term auf der rechten Seite), einen Druckgradienten und die Elektronenträgheit (4. Term auf der rechten Seite). Die beiden letzten Terme auf der rechten Seite werden im Rahmen einer MHD-Beschreibung vernachlässigt. Man kann zeigen, dass sie nur für sehr kleine Skalen von Bedeutung sind, wo sie zu einer Trennung von Elektronen- und Ionenbewegung führen. Eine Behandlung solcher Effekte ist im Rahmen einer Ein-Flüssigkeitsbeschreibung nicht möglich. Der Hall-Term bringt eine Besonderheit in das Ohmsche Gesetz: Er verändert die lineare Beziehung zwischen Strom und elektrischem Feld. Damit bewirkt ein elektrisches Feld senkrecht zum Magnetfeld einen Strom (wegen der Ablenkung der Ladungsträger durch die Lorentz-Kraft). Dieses Phänomen wird später noch detaillierter bei der Diskussion der MHD-Generatoren diskutiert. Zusammenfassend haben wir im Rahmen der MHD folgende Gleichungen zu lösen

Kontinuitätsgleichung:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \cdot \vec{v}) = 0$

Kraftgleichung:  $\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}$

Ohmsches Gesetz:  $\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{j} - \frac{1}{en_e} (\vec{j} \times \vec{B})$

Zusätzlich sind die Maxwell-Gleichungen zu lösen:  $-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \vec{E}$ ,  $\mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B}$ ,  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  und als Abschlussbedingung der Hierarchiegleichungen eine thermodynamische Zustandsgleichung für den Druck, hier wird wieder die adiabatische Zustandsänderung angenommen:

$$\frac{d(p\rho^{-\gamma})}{dt} = 0$$

Im Folgenden wollen wir die Konsequenzen aus den oben abgeleiteten MHD-Gleichungen aufzeigen. Ausgehend vom idealen Ohmschen Gesetz ( $\eta \rightarrow 0$ ) und unter Vernachlässigung des Hall-Terms (die Konsequenz daraus wird weiter unten diskutiert)

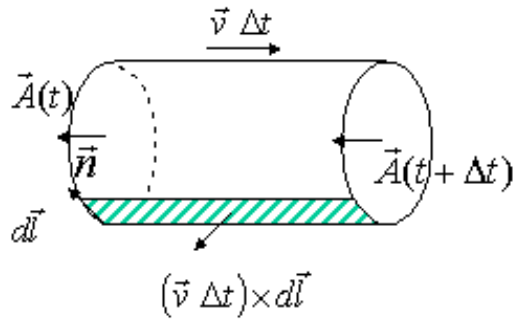
$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = 0$$

können wir eine wichtige Schlussfolgerung ziehen. Nehmen wir an, wir bewegen eine Schleife und bewegen sie gegen das Plasma mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$

Dann finden wir für die Änderung des magnetischen Flusses  $\Psi = \int \vec{B} d\vec{A}$  durch die Schleife

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int_{\vec{A}(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} + \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{\vec{A}(t+\Delta t)} \vec{B} \cdot d\vec{A} - \int_{\vec{A}(t)} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right]$$

Aus der Divergenzfreiheit des Magnetfeldes findet man

Abbildung 9.1: Skizze zur Fluss-  
erhaltung

$$\frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{\vec{A}(t+\Delta t)} \vec{B} \cdot d\vec{A} - \int_{\vec{A}(t)} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right] = \frac{1}{\Delta t} \oint \vec{B} \cdot (\vec{v} \Delta t) \times d\vec{l}$$

und damit

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} + \oint \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l})$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist ein Flächenintegral über die Schleife und berücksichtigt die Flussänderung aufgrund der Änderung des B-Feldes, der zweite ein Umlaufintegral, das die Flussänderung aufgrund der Bewegung der Schleife senkrecht zum (inhomogenen) Magnetfeld berücksichtigt. Ersetzt man nun  $\partial \vec{B} / \partial t$  nach dem Faradayschen Gesetz durch  $-\vec{\nabla} \times \vec{E}$  und benutzt für  $E$  das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz, so kann man den ersten Summanden auf der rechten Seite mit dem Stokeschen Satz in ein Umlaufintegral umwandeln und erhält schließlich

$$\frac{d\Psi}{dt} = \oint \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l}) - \oint \vec{B} \cdot (\vec{u} \times d\vec{l})$$

Das bedeutet, dass im Rahmen der idealen MHD das Magnetfeld im Plasma ‐eingefroren‐ ist, es bewegt sich mit dem Plasma mit. Wir haben zur Vereinfachung der Ableitung den Hall-Term im Ohmschen Gesetz vernachlässigt. Unter Berücksichtigung dieses Terms würde man das genauere Ergebnis erhalten, dass sich das Magnetfeld nicht mit der Schwerpunktgeschwindigkeit des Plasmas, sondern mit der Elektronengeschwindigkeit bewegt.

Diese Aussage hat Konsequenzen für die in der idealen MHD zulässigen Bewegungen des Plasmas: Nur solche Strömungen, bei denen sich die Topologie der Feldlinien nicht ändert, sind zugelassen. Also kann sich in der idealen MHD eine Plasmasäule zwar kontrahieren, nicht aber abreißen. Ein Beispiel zeigt die Abbildung 9.2. Bei der Kontraktion erhöht sich das Magnetfeld wegen der Fluss-erhaltung: Verringert sich die Querschnittsfläche von  $F_1$  zu  $F_2$ , so gilt ungefähr  $B_2 = B_1 F_1 / F_2$ . Dieser Mechanismus wird auch für die extrem hohen Magnetfelder (bis zu  $10^8$  T) in den Neutronensternen verantwortlich gemacht: Bei der Kontraktion eines Sterns zum Neutronenstern ist der magnetische Fluss innerhalb des Sterns wegen der hohen Temperaturen praktisch eingefroren, das Magnetfeld kann so um mehrere Größenordnungen erhöht werden. Nimmt man z. B. einen Radius von  $r_2 = 20$  km für den Neutronenstern und  $r_1 = 696000$  km (Sonnenradius) an, so erhöht sich das Magnetfeld um den Faktor  $r_1^2 / r_2^2 \approx 10^9$ .

Eine Änderung der Magnetfeldtopologie ist nur möglich, wenn die endliche Resistivität der Plasmen berücksichtigt wird. Aus dem Ohmschen Gesetz (hier der Einfachheit halber wieder ohne den Hall-Term)



Abbildung 9.2: Bei der Kontraktion einer Plasmasäule erhöht sich der magnetische Fluss



$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}$$

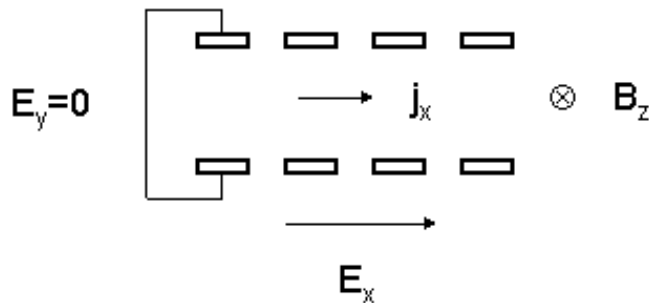
folgt unter Nutzung der Maxwell-Gleichungen

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{B} + \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) .$$

Man erhält also eine Art Diffusionsgleichung für das Magnetfeld. Das Magnetfeld ist nun nicht mehr eingefroren, sondern kann seine Topologie verändern. In Plasmen mit hoher Leitfähigkeit geschieht dies allerdings auf sehr langsamen Zeitskalen.

Wir wollen uns nun näher mit der Bedeutung des Hall-Terms im verallgemeinerten Ohmschen Gesetz befassen. Wir wollen zunächst die in Abbildung 9.3 gezeigte Anordnung betrachten. Alle Elektroden seien in  $y$ -Richtung kurzgeschlossen, sodass es nur eine Komponente des E-Feldes in  $x$ -Richtung (senkrecht zum Magnetfeld!) gibt. Das elektrische Feld bewirkt einen Strom in  $x$ -Richtung. Dieser wird in Niedertemperaturplasmen (die wir hier und im Folgenden betrachten wollen) vor allem von den Elektronen getragen, da die Ionen bei geringem Ionisationsgrad (durch höhere Stoßfrequenz mit den Neutralen) stark an die neutralen Teilchen gekoppelt sind. Wenn man das Ohmsche Gesetz für die beiden Richtungen senkrecht zum Magnetfeld aufschreibt

Abbildung 9.3: Anordnung zur Erläuterung der Auswirkungen des Hall-Terms



$$E_x = \eta_{\perp} j_x + \frac{1}{en} j_y B_z$$

$$E_y = \eta_{\perp} j_y - \frac{1}{en} j_x B_z = 0$$

findet man einen Strom in  $y$ -Richtung auch bei verschwindendem  $E_y$ . Dieser Strom entsteht wegen der Ablenkung der Ladungsträger bei Bewegung senkrecht zum Magnetfeld (Hall-Effekt). Er wird bestimmt aus dem Gleichgewicht aus Reibungskraft und Lorentz-Kraft

$$j_y = \frac{\sigma}{en} j_x B_z$$

Wenn man das Magnetfeld ausdrückt durch die Gyrationfrequenz ( $\omega_c = \frac{eB}{m_e}$ ) und die Spitzerleitfähigkeit verwendet ( $\eta = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e}{ne^2\tau_{ei}}$ ), findet man

$$j_y = \frac{\omega_c}{\nu_{ei}} j_x$$

Der Strom senkrecht zu  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  kann also bedeutend größer werden als der Strom, der vom elektrischen Feld getrieben wird, falls  $\frac{\omega_c}{\nu_{ei}} > 1$ , also für stark magnetisierte Plasmen.

Dieses Ergebnis in die  $x$ -Komponente des Ohmschen Gesetzes eingesetzt liefert für den Strom in  $x$ -Richtung:

$$j_x = \sigma_{\perp} E_x - \frac{\omega_c^2}{\nu_{ei}^2} j_x = \frac{\sigma_{\perp} E_x}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu_{ei}^2}}$$

Damit erhält man für den Strom in  $y$ -Richtung

$$j_y = \frac{\omega_c}{\nu_{ei}} j_x = \frac{\sigma_{\perp} E_x}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu_{ei}^2}} \frac{\omega_c}{\nu_{ei}}$$

Die beiden Komponenten lassen sich zusammenfassen zu folgendem Ausdruck für den Strom senkrecht zum Magnetfeld

$$\vec{j}_{\perp} = \frac{\sigma}{1 + \left(\frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}}\right)^2} \cdot \left[ \vec{E}_{\perp} - \left(\frac{\omega_{ce}}{\nu}\right) \cdot \left( \vec{E}_{\perp} \times \frac{\vec{B}}{|B|} \right) \right]$$

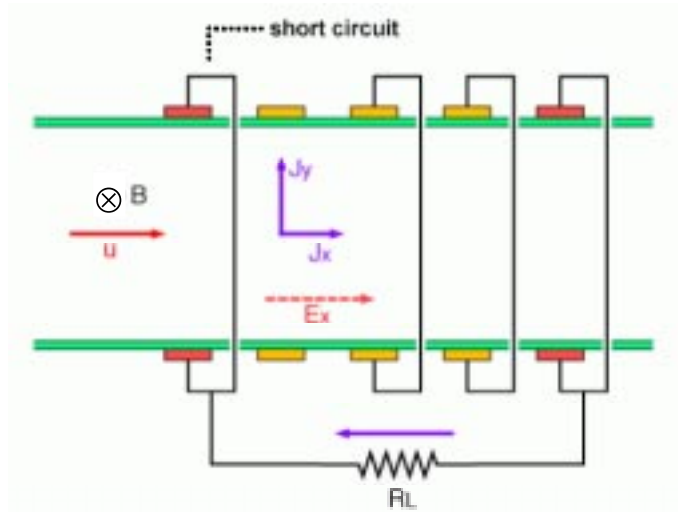
Zusammenfassend erhält man also folgendes Ergebnis:

- die Leitfähigkeit für  $\vec{E} \parallel \vec{B}$  ist (wie schon bekannt) durch die einfache Spitzer-Formel gegeben. Der Strom  $\vec{j}$  fließt in Richtung  $\vec{E}$  (und  $\vec{B}$ ) mit Spitzer-Leitfähigkeit
- für  $E \perp B$  gibt es zwei Strombeiträge in die zwei möglichen Senkrecht-Richtungen. Dabei ist die Leitfähigkeit in die eigentliche E-Richtung u. U. erheblich reduziert! Der hier auftretende Faktor  $1 / \left(1 + (\omega_{ce}/\nu)^2\right)$  kann in heißen Plasmen ( $\nu_{ei} = \text{klein!}$ ) und bei hohen Magnetfeldern ( $\omega_{ce} = \text{groß}$ ) durchaus extrem kleine Werte annehmen (typ.  $10^{-6} - 10^{-10}$ ). Für  $j$  in Richtung E (mit  $E \perp B$ ) wird das Plasma also praktisch zum Isolator!
- Dafür fließt dann aber in die "dritte" Richtung ein um den Faktor  $(\omega_{ce}/\nu)$  deutlich höherer Strom (wobei die Leitfähigkeit aber dennoch um denselben Faktor (etwa  $10^3 - 10^5$ ) unter der Parallel-B-Leitfähigkeit (= Spitzer-Leitfähigkeit) zurückbleibt.

Der Hall-Effekt findet u. a. Anwendung beim gleichnamigen MHD-Generator (Hall-Generator). Wir betrachten die gleiche Anordnung wie zuvor, aber zusätzlich eine Plasmaströmung in  $x$ -Richtung:

Aus dem Ohmschen Gesetz in  $y$ -Richtung findet man

Abbildung 9.4: Prinzipschaltbild für den Hall-Generator



$$j_y \approx \frac{\omega_c}{\nu_{ei}} j_x - \sigma_{\perp} u_x B_z$$

Das Ohmsche Gesetz in  $x$ -Richtung liefert

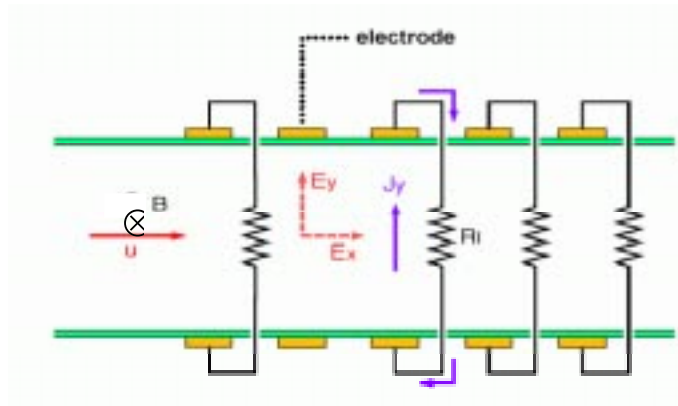
$$j_x = \frac{\sigma_{\perp} E_x}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu_{ei}^2}} + u_x B_z \frac{\sigma_{\perp} \frac{\omega_c}{\nu_{ei}}}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu_{ei}^2}}$$

Man findet also ein effektives elektrisches Feld

$$E_x^{eff} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu_{ei}^2}} (E_x + u_x B_z \omega_c / \nu_{ei}) ,$$

wobei die zusätzliche Spannung infolge der Plasmaströmung abgegriffen werden kann. Eine andere Form des MHD-Generators ist der Faraday-Generator, siehe Abbildung 9.5.

Abbildung 9.5: Prinzipschaltbild für den Faraday-Generator



Hierbei werden die Ströme in  $x$ -Richtung unterdrückt, weshalb der Hall-Effekt keine Rolle spielt. Die Plasmabewegung erzeugt direkt über den  $\vec{u} \times \vec{B}$ -Term ein elektrisches Feld in  $y$ -Richtung, das abgegriffen wird. Die resultierende  $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kraft hat bremsende Wirkung auf die Plasmaströmung.

Ein Vorteil der MHD-Generatoren ist die Möglichkeit, sie bei höheren Temperaturen als Dampfturbinen zu betreiben. Um ausreichende Leitfähigkeit der Plasmen (bei den immer noch relativ niedrigen Temperaturen) zu erreichen, muss man jedoch Alkalimetalle zusetzen. Diese Metalle

sind jedoch sehr aggressiv, sodass aufgrund von Materialproblemen MHD-Generatoren nicht zur kommerziellen Stromerzeugung angewandt werden. Sie finden jedoch bei sogenannten Plasmatriebwerken als Raketentriebwerke Anwendung, die eine Umkehrung des Generatorprinzips benutzen:  $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kräfte werden verwendet, um die Geschwindigkeit des ausgestoßenen Plasmas zu erhöhen (die wesentlich höher werden kann als bei gewöhnlichen Verbrennungsmotoren).

# Kapitel 10

## MHD Gleichgewicht und Stabilität

Eine Anwendung der oben hergeleiteten MHD-Gleichungen besteht in der Berechnung von MHD-Gleichgewichten, d. h. von Konfigurationen, in denen ein Plasma im Kräftegleichgewicht ist. Fordern wir zusätzlich zu  $\partial/\partial t \rightarrow 0$  auch noch  $v = 0$ , so verschwindet die linke Seite der im vorigen Kapitel abgeleiteten Kraftgleichung und wir erhalten (für isotropen Druck)

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g}$$

Ein Druckgradient im Plasma kann also aufrechterhalten werden durch Gravitationskräfte (z. B. in Sternen) oder durch Ströme senkrecht zum Magnetfeld und den damit verbundenen Lorentzkräften (z. B. magnetisch eingeschlossene Fusionsplasmen).

Im Folgenden wollen wir uns nicht mit dem Einfluss der Gravitation befassen, der in Laborplasmen in der Regel vernachlässigbar ist. Unter dieser Annahme kann man obige Gleichung mit Hilfe von

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times B) \times B = \frac{1}{\mu_0} \left( B \nabla B - \nabla \left( \frac{B^2}{2} \right) \right) \rightarrow \nabla_{\perp} \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B^2}{\mu_0 R_c} e_{R_c} = 0$$

umformen.

Demnach kann das Magnetfeld auf zweierlei Art kinetischen Druck bilanzieren: Senkrecht zu den Magnetfeldlinien wird der *magnetische Druck*  $B^2/2\mu_0$  ausgeübt (das Magnetfeld "wehrt" sich gegen Kompression). Der zweite Term beschreibt die *Feldlinienspannung*, d. h. die Auslenkung gerader Feldlinien übt über die Krümmung eine Kraft in Richtung des Krümmungsradius aus.

Durch Multiplikation der Gleichgewichtsbedingung mit  $\vec{B}$  bzw.  $\vec{j}$ , findet man

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0$$

$$\vec{j} \cdot \nabla p = 0$$

Der Druck und die Stromdichte sind entlang von Magnetfeldlinien konstant. Diese Größen variieren also nur senkrecht zum Magnetfeld.

Wir werden uns im Teil 2 der Vorlesung intensiver mit Konfigurationen für den magnetischen Einschluss beschäftigen. Hier soll nur ein sehr einfaches Beispiel für ein MHD-Gleichgewicht in einer linearen Konfiguration vorgestellt werden, der sogenannte  $z$ -Pinch. Dies ist ein zylindrisches Plasma, an dessen Enden eine Spannung anliegt. Dadurch fließt ein Strom  $j_z$ . Dieser erzeugt ein Magnetfeld  $B_\theta$ ; die Kraft  $j_z \times B_\theta$  bilanziert den radialen Druckgradienten  $dp/dr$ . Die Verhältnisse veranschaulicht Abbildung 10.1.

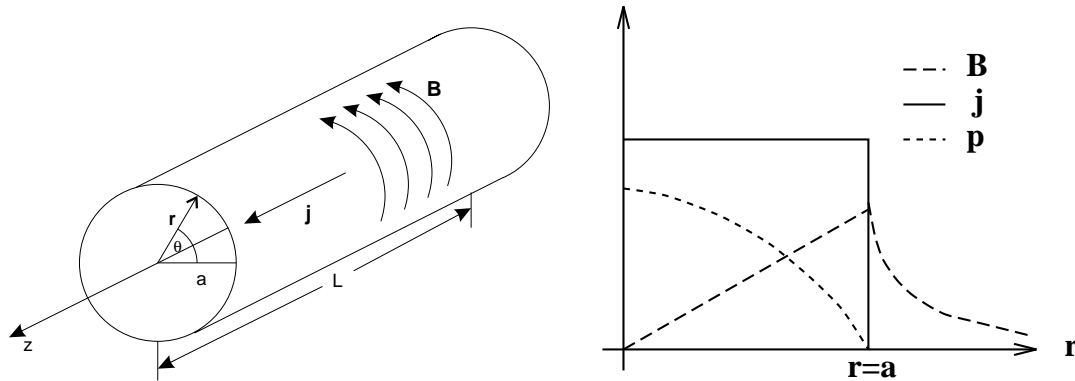


Abbildung 10.1: Schematische Anordnung des  $z$ -Pinches (links) und typische radiale Profile

Das Amperesche Gesetz liefert die  $\theta$ -Komponente des Magnetfelds:

$$\frac{1}{\mu_0 r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) = j_z$$

Die Kraftgleichung kann damit wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{dp}{dr} = -j_z B_\theta = -\frac{1}{\mu_0 r} B_\theta \frac{d}{dr} (r B_\theta) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} - \frac{d}{dr} \frac{B_\theta^2}{2\mu_0}.$$

Im  $z$ -Pinch wird also der Plasmadruck sowohl durch magnetischen Druck als auch durch Feldlinienspannung (im Zylinder entspricht  $r$  gerade dem Krümmungsradius) bilanziert. Spezifiziert man ein Stromprofil, so kann man die Profile von  $B_\theta$  und  $p$  berechnen. Für den Fall einer konstanten Stromdichte  $j_z = I_p / (\pi a^2)$  ( $a$  ist der Plasmaradius) ergeben sich die in der Abbildung dargestellten Profile:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi a^2} r \quad \text{falls } r \leq a$$

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi r} \quad \text{falls } r > a$$

$$p = \frac{\mu_0 I_p^2}{4\pi^2 a^2} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)$$

Der Druck im Plasma ist also experimentell durch den Wert des Plasmastroms  $I_p$  festgelegt. Die Effizienz des Einschlusses lässt sich durch die dimensionslose Größe  $\beta$ , das Verhältnis von gemitteltem kinetischem Druck  $p$  und magnetischem Druck  $B^2 / (2\mu_0)$  beschreiben:

$$\beta_\theta = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_\theta^2(a)}$$

Für den  $z$ -Pinch ergibt sich  $\beta_\theta = 1$ , d. h. kinetischer und magnetischer Druck sind gleich. Dies

ist ein sehr großer Wert für den normierten Plasmadruck, denn wir werden lernen, dass für realistische Einschlusskonfigurationen der Plasmadruck oft nur wenige Prozent des magnetischen Drucks beträgt. In der Praxis zeigt sich jedoch, dass der  $z$ -Pinch eine instabile Konfiguration ist. Die Plasmasäule kontrahiert sich und reißt innerhalb kurzer Zeit ab. Der  $z$ -Pinch ist daher ein Beispiel dafür, dass es nicht ausreichend ist, ein MHD-Gleichgewicht zu finden. Man muss auch dessen Stabilität untersuchen, also der Frage nachgehen, wie das System auf (kleine) Auslenkungen aus dem Gleichgewichtszustand reagiert. Ausgangspunkt solcher Untersuchungen sind die im vorigen Kapitel abgeleiteten MHD-Gleichungen. Der für diese Untersuchungen erforderliche Aufwand kann deutlich reduziert werden, wenn man sich auf kleine Auslenkungen aus dem Gleichgewicht beschränkt. Dann kann man die Störungen des Gleichgewichtes im Sinne einer Störungsentwicklung behandeln. Wir wollen im Folgenden die Störung eines Gleichgewichts

$$\nabla p_0 = \vec{j}_0 \times \vec{B}_0$$

betrachten und einen Störungsansatz für die Größen  $\rho$ ,  $\vec{u}$ ,  $p$  und  $\vec{B}$  der Form

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) + \rho_1(\vec{r}, t)$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_0(\vec{r}) + \vec{u}_1(\vec{r}, t) = \vec{u}_1(\vec{r}, t)$$

$$p(\vec{r}, t) = p_0(\vec{r}) + p_1(\vec{r}, t)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r}) + \vec{B}_1(\vec{r}, t)$$

machen, wobei die Störungsreihe nach dem linearen Term abgebrochen wurde. Wir haben unser Problem weiter vereinfacht, indem wir uns auf statische Gleichgewichte ( $\vec{u}_0 = 0$ ) beschränkt haben. Zu niedrigster Ordnung findet man aus den MHD-Gleichungen wieder die Gleichgewichtsbedingung.

Beschränken wir uns auf den Term 1. Ordnung, finden wir folgende Gleichungen für die zeitliche Entwicklung der gestörten Größen. Die Kontinuitätsgleichung führt (man beachte  $\vec{u}_0 = 0$ ) auf:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\vec{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 - \rho_0 \nabla \cdot \vec{u}_1$$

Die Kraftgleichung liefert unter Nutzung des Amperschen Gesetzes

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0.$$

Die zeitliche Entwicklung des gestörten Magnetfeldes folgt aus Faradayschem und idealen Ohmschen Gesetz zu:

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u}_1 \times \vec{B}_0)$$

und das Adiabatengesetz liefert unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung den gestörten Druck

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{u}_1 .$$

Wenn man in der Kraftgleichung das gestörte Magnetfeld durch obigen Ausdruck ersetzt, wird deutlich, dass für die linearisierten MHD-Gleichungen die einzige zeitabhängige Variable jeweils auf der rechten Seite die gestörte Geschwindigkeit  $\vec{u}_1$  ist. Wir wollen diese Größe durch eine anschaulichere Größe, den Verschiebungsvektor  $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ , der die Verschiebung eines Flüssigkeitselements aus der Ruhelage beschreibt,

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) \equiv \int_0^t \vec{u}_1(\vec{r}, t') dt'$$

ausdrücken.

Partielle Integration der linearen MHD-Gleichungen (Anfangswerte der Störgrößen bei  $t = 0$  verschwinden) liefert für das gestörte Magnetfeld

$$\vec{B}_1(\vec{r}, t) = \nabla \times (\vec{\xi}(\vec{r}, t) \times \vec{B}_0(\vec{r}))$$

Diese Gleichung besagt, dass eine Auslenkung des Plasmas senkrecht zum Gleichgewichtsfeld zu einer Änderung des Magnetfeldes führt.

Der gestörte Druck lässt sich darstellen als:

$$p_1(\vec{r}, t) = -\vec{\xi}(\vec{r}, t) \cdot \nabla p_0(r) - \gamma p_0(\vec{r}) \nabla \cdot \vec{\xi}(\vec{r}, t)$$

d. h. eine Druckänderung geschieht entweder durch adiabatische Kompression oder durch Auslenkung eines Volumenelements.

Diese beiden Gleichungen in die Kraftgleichung eingesetzt führt auf den Ausdruck

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F}(\vec{\xi}(\vec{r}, t)) .$$

Diese Gleichung hat natürlich weiterhin die Form einer Kraftgleichung: Masse x Beschleunigung = Kraft. Der Ausdruck für die Kraft folgt aus obigen Gleichungen zu

$$\vec{F}(\vec{\xi}) = \nabla (\vec{\xi} \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi}) + \vec{j}_0 \times \vec{B}_1 + \vec{j}_1 \times \vec{B}_0$$

mit

$$\vec{B}_1 = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \quad \vec{j}_1 = (\nabla \times \vec{B}_1) / \mu_0$$



Wenn wir annehmen, dass die Abhängigkeiten von Zeit und Ort separierbar sind, können wir einen Fourier-Ansatz verwenden

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}(\vec{r}) e^{-i\omega t} .$$

Damit erhält man aus der Kraftgleichung das Eigenwertproblem

$$-\rho_0 \omega^2 \vec{\xi}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{\xi}(\vec{r})) .$$

Da wir im Rahmen der idealen MHD ein dissipationsfreies System betrachten (d. h. weder Quellen noch Senken im System haben), ist der MHD-Kraftoperator hermitesch. Daher sind die Eigenwerte  $\omega^2$  reell und man erhält als Stabilitätskriterium  $\omega^2 > 0$ . Dann ist  $\omega$  reell, d. h. das System führt Oszillationen um die Gleichgewichtslage aus. Das System ist also stabil. Für den Fall  $\omega^2 < 0$  ist  $\omega$  allerdings imaginär und es existiert eine exponentiell anwachsende Lösung, d. h. das System ist instabil.

Wir wollen im Folgenden keine Stabilitätsuntersuchungen für konkrete Einschlusskonfigurationen durchführen. Dazu sei auf den zweiten Teil der Vorlesung verwiesen. Wir wollen aber die stabilen Lösungen, d. h. die Plasmawellen untersuchen. (Hier handelt es sich natürlich nur um einen Teil der tatsächlich auftretenden Wellen im Plasma. Bei der Ableitung der MHD-Gleichungen hatten wir den Verschiebungsstrom in den Maxwell-Gleichungen vernachlässigt und ein Einflüssigkeitsmodell gewählt. Eine allgemeinere Diskussion über Wellenphänomene in Plasmen wird im folgenden Kapitel gegeben.) Wir wollen uns im Folgenden auf den einfachsten Fall eines homogenen Plasmas ( $\nabla p_0 = 0, \vec{j}_0 = \nabla \times \vec{B}_0 = 0$ ) beschränken. Die Kraftgleichung reduziert sich dann zu:

$$\vec{F}(\vec{\xi}) = \nabla(\gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi}) + \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 .$$

Im räumlich homogenen System kann man auch eine Fourierentwicklung im Ort ausführen:

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \omega} \vec{\xi}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} .$$

Damit findet man folgende Wellengleichung

$$\rho_0 \omega^2 \vec{\xi} = \gamma p_0 (\vec{k} \cdot \vec{v}) \vec{k} + \frac{1}{\mu_0} \left[ \vec{k} \times (\vec{k} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)) \right] \times \vec{B}_0 .$$

Der erste Term in dieser Gleichung ist proportional zum Druck und enthält nicht das Magnetfeld. Wir werden sehen, dass dieser Term auf die Schallwellen führt. Der zweite Term beschreibt die für magnetisierte Plasmen typischen Alfvén-Wellen. Wir führen zwei typische Geschwindigkeiten ein:

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

ist die Schallgeschwindigkeit und

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}$$

ist die Alfvén-Geschwindigkeit. Dies ist die in der MHD maximal erreichbare Geschwindigkeit. Sie ist begrenzt durch die Trägheit der Ionen. Höhere Geschwindigkeiten kann man nur erhalten, wenn man Elektronen und Ionen getrennt betrachtet.

Wenn man eine einfache Geometrie betrachtet, wobei das B-Feld in z-Richtung liegt, findet man aus der obigen Wellengleichung

$$\omega^2 \vec{\xi} = c_s^2 (\vec{k} \cdot \vec{\xi}) \vec{k} + v_A^2 [\vec{k} \times (\vec{k} \times (\vec{\xi} \times \vec{e}_z))] \times \vec{e}_z$$

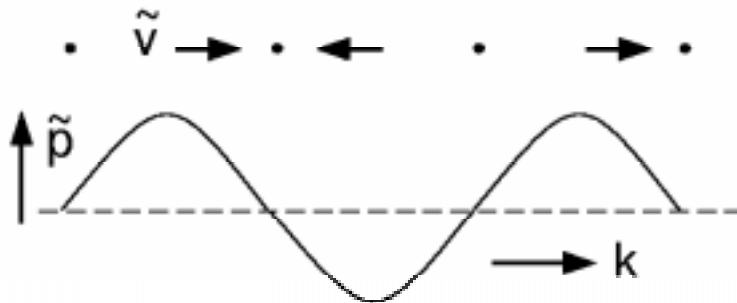
In den 3 Komponenten aufgeschrieben, findet man ein Gleichungssystem, das nicht-triviale Lösungen ( $\vec{\xi} \neq 0$ ) nur hat, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Diese Forderung führt auf folgende Dispersionsrelation:

$$(\omega^2 - k_{\parallel}^2 v_A^2) [(\omega^2 - k^2 v_A^2 - k_{\perp}^2 c_s^2) (\omega^2 - k_{\parallel}^2 c_s^2) - k_{\perp}^2 k_{\parallel}^2 c_s^4] = 0$$

Dies ist eine Gleichung dritten Grades in  $\omega^2$ , d. h. wir erwarten 3 Wellentypen. Bereits für den Fall verschwindenden Magnetfeldes ( $v_A = 0$ ) finden wir die bekannten Schallwellen (longitudinale Welle) mit der charakteristischen Schallgeschwindigkeit

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c_s \text{ (Phasengeschwindigkeit)}$$

Abbildung 10.2: Schematische Darstellung von Schallwellen



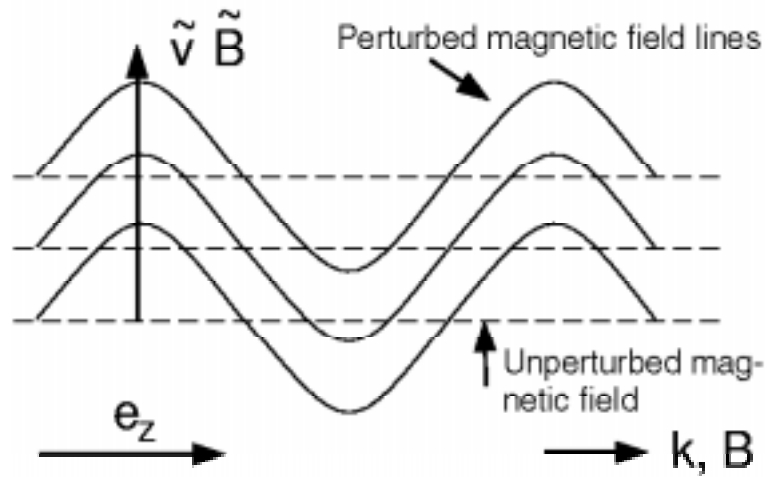
Diese Wellen treten bekanntlich auch in neutralen Gasen auf und vermitteln den Austausch zwischen kinetischer Energie (Plasmabewegung) und Kompressionsenergie.

Betrachten wir nun den Fall verschwindenden Plasmadrucks ( $\rho_0 = 0, c_s = 0$ ), finden wir eine Welle mit der Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = v_A$ . Diese Welle ist eine transversale Welle, die sich parallel zum Magnetfeld ausbreitet.

Diese Welle vermittelt den Energieaustausch zwischen kinetischer Energie und gestörter Magnetfeldenergie. In einem idealen Gas könnte sich ohne Druckstörung keine Welle ausbreiten, weil es keine rücktreibende Kraft gäbe. Im magnetisierten Plasma dagegen wird die rücktreibende Kraft durch die Feldlinienspannung gegeben.

Für den Fall, dass man sowohl ein Magnetfeld als auch endlichen Plasmadruck vorliegen hat, kann noch eine dritte Welle auftreten: die kompressionale Alfvén-Welle. Dies ist eine longitudinale Welle, bei der kinetische Energie und Kompressionsenergie ausgetauscht werden. Die Phasengeschwindigkeit dieser Welle ist eine Kombination aus Schall- und Alfvén-Geschwindigkeit

Abbildung 10.3: Schematische Darstellung von Scher-Alfvén-Wellen



$$\nu_{ph} = \sqrt{\frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0}},$$

weil hier sowohl das Plasma selbst als auch die Magnetfeldlinien komprimiert werden.

Zum Abschluss unserer Betrachtungen zur Magnetohydrodynamik wollen wir uns noch mit einer, insbesondere für die Astrophysik, sehr interessanten Frage beschäftigen: Woher kommen die Magnetfelder, die wir im Weltraum messen.

Wenn wir von der im vorigen Kapitel abgeleiteten Gleichung für die zeitliche Entwicklung des Magnetfeldes ausgehen

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B} + \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}),$$

findet man zunächst nur Terme proportional zum Magnetfeld, d. h. wenn man in einem Anfangszustand kein Magnetfeld hat, entsteht auch später keines. Allerdings ist es ja prinzipiell möglich, dass sich Instabilitäten entwickeln und damit verbunden, kleine bereits existierende Magnetfelder anwachsen. Daher wollen wir im Folgenden die zeitliche Entwicklung der Magnetfeldenergie betrachten und multiplizieren dazu obige Gleichung mit  $\frac{\vec{B}}{2\mu_0}$ :

$$\frac{\partial B^2 / (2\mu_0)}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0^2} \vec{B} \cdot \nabla^2 \vec{B} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}).$$

Unter Ausnutzung von entsprechenden Vektoridentitäten und dem Ampèreschen Gesetz findet man nach Integration über das Plasmavolumen folgenden Ausdruck für die Änderung der Magnetfeldenergie

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dV \frac{B^2}{2\mu_0} = - \int dV \eta |j|^2 - \int dV \vec{u} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}).$$

Der erste Term beschreibt offenbar die Dissipation durch endliche Resistivität, die immer zu einer Absenkung der Magnetfeldenergie führt. Die Bedeutung des 2. Terms auf der rechten Seite erkennt man leicht, wenn man die MHD-Kraftgleichung mit der Plasmageschwindigkeit multipliziert, man erhält

$$\frac{1}{2}\rho\frac{du^2}{dt} = \vec{u} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) - \vec{u} \cdot \nabla p.$$

Der Term  $\vec{u} \cdot (\vec{j} \times \vec{B})$  beschreibt offenbar die Umwandlung zwischen Magnetfeldenergie und kinetischer Energie. Wir können also folgern, dass sich die Magnetfeldenergie ändert durch Dissipation und Umwandlung zwischen Magnetfeld- und kinetischer Energie. Die Magnetfeldenergie kann also nur auf Kosten von kinetischer Energie erhöht werden. Das Magnetfeld zerfällt in statischen Plasmen mit einer charakteristischen Zeitskala

$$\tau_M = \frac{\mu_0}{\eta} L^2$$

(L: charakteristische Länge des Systems).

Ein Anwachsen des Magnetfeldes kann man nur finden, wenn ausreichend kinetische Energie zur Verfügung steht

$$\frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 B < \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}),$$

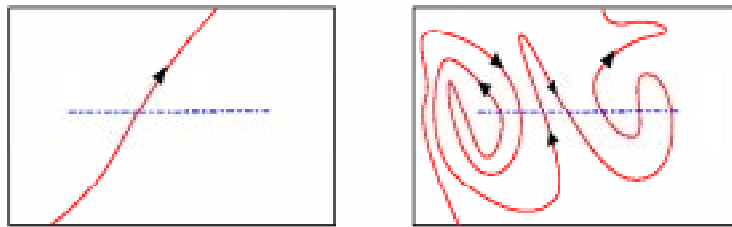
was gleichbedeutend ist mit der Forderung, dass die sogenannte magnetische Reynolds-Zahl größer als 1 ist:

$$R_M = \frac{\mu_0 u L}{\eta} > 1$$

(Beachte die Analogie zur Reynold-Zahl in der Hydrodynamik!)

Die Frage ist nun, wie man ein Magnetfeld durch Plasmabewegung erzeugen kann. In zweidimensionaler (2D) Geometrie ist das nicht möglich. Aus der Abbildung 10.4 wird deutlich, dass in 2D-Geometrie das "Verbiegen" von Magnetfeldlinien nicht den magnetischen Fluss durch die eingezeichnete Kontroll"fläche" ändert.

Abbildung 10.4: In 2-dimensionaler Geometrie kann man durch "Verbiegen" der Magnetfeldlinien nicht den magnetischen Fluss durch eine "Kontrollfläche" (gestrichelte Linie) ändern.



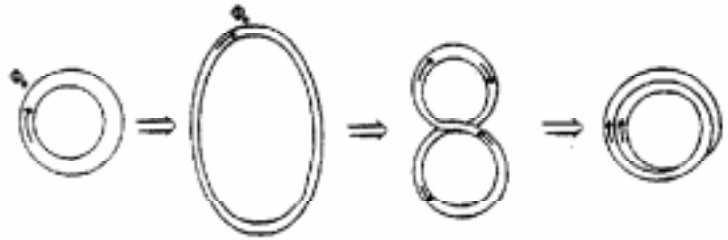
In dreidimensionaler Geometrie ist eine Plasmabewegung, die zu einer Erhöhung des Magnetfeldes führt, dagegen denkbar. Wir dehnen einen Plasmaring und formen ihn, wie in der Abbildung 10.5 dargestellt.

Wir haben also durch Verformung eines Plasmarings tatsächlich eine Änderung des magnetischen Flusses durch eine Kontrollfläche erreicht.

Wir wollen im Folgenden untersuchen, ob wir ein makroskopisches Magnetfeld erzeugen können aus statistisch fluktuierenden mikroskopischen Magnetfeldern und Geschwindigkeitsstörungen, deren zeitliche und räumliche Mittelwerte verschwinden:

$$B = \langle B \rangle + \tilde{B} \quad v = \langle v \rangle + \tilde{v}$$

Abbildung 10.5: In 3-dimensionaler Geometrie kann eine Verformung des Plasmarings zu einer Änderung des magnetischen Flusses führen.



$$\langle \tilde{B} \rangle = 0 \quad \langle \tilde{v} \rangle = 0$$

Für die zeitliche Änderung des mittleren Magnetfeldes findet man mit

$$\frac{\partial (\langle \vec{B} \rangle + \tilde{B})}{\partial t} = \nabla \times \left[ (\langle \vec{v} \rangle + \tilde{v}) \times (\langle \vec{B} \rangle + \tilde{B}) \right] + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 (\langle \vec{B} \rangle + \tilde{B})$$

durch Mittelwertbildung folgenden Ausdruck

$$\frac{\partial \langle \vec{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times \left[ \langle \vec{v} \rangle \times \langle \vec{B} \rangle + \langle \tilde{v} \times \tilde{B} \rangle \right] + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \langle \vec{B} \rangle .$$

Daraus folgt, dass im Prinzip Fluktuationen, deren Mittelwert verschwindet dennoch zu einer Änderung des makroskopischen Magnetfeldes führen können. Dieser Effekt wird als kinematischer Dynamo bezeichnet. Er ist u. a. auch für die Erzeugung des Magnetfeldes der Erde verantwortlich. Die zur Erzeugung des Magnetfeldes erforderliche Strömung im flüssigen Erdkern wird getrieben durch den Druckgradienten. Dieser wird vermutlich aufrechterhalten durch die ständige Abkühlung der äußeren Erdschichten.



# Kapitel 11

## Wellen im Plasma

In einem neutralen Gas gibt es keine freien Ladungsträger. Es existieren daher im Wesentlichen zwei unterschiedliche Arten von Wellen:

- Elektromagnetische Wellen: Wie aus der Elektrodynamik bekannt, können die Maxwell-Gleichungen im Vakuum zu einer Wellengleichung umgeformt werden. Die Lösungen dieser Gleichungen sind die bekannten elektromagnetischen Wellen, bei denen die Vektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sowohl senkrecht aufeinander als auch senkrecht zum Wellenzahlvektor  $\vec{k}$ , d. h. zur Ausbreitungsrichtung orientiert sind. Es handelt sich also um eine *Transversalwelle*. Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist die Lichtgeschwindigkeit  $v_{ph} = \omega/k = c$ .
- Schallwellen: Die Kompression idealer Gase ruft eine rücktreibende Kraft hervor, daher kann es zu Schallwellen kommen. Diese ergeben sich zum Beispiel aus den entsprechenden Flüssigkeitsgleichungen, d. h. durch die Kombination von Kraftgleichung und Kontinuitätsgleichung. Hier ist  $\vec{k} \parallel \nabla p$ ; es handelt sich um eine *Longitudinalwelle*. Die Phasengeschwindigkeit ist die Schallgeschwindigkeit  $c_s = \sqrt{\gamma k_B T / m}$ , wobei  $\gamma$  der Adiabatenkoeffizient ist und  $m$  die Atom- oder Molekülmasse bezeichnet. Die Schallgeschwindigkeit ist damit im Wesentlichen die thermische Geschwindigkeit.

Im Plasma haben wir es dagegen mit freien Ladungsträgern zu tun; daher koppelt die Teilchenbewegung an das elektromagnetische Feld. Zusätzlich kann ein externes Magnetfeld die Teilchenbewegung senkrecht dazu stark beschränken. Aus diesem Grund existiert in einem Plasma ein ganzer “Zoo” von Wellenphänomenen.

Plasmawellen haben eine große Bedeutung, insbesondere für die Plasmaheizung, aber auch für die Diagnostik. Erste Arbeiten zu den Plasmawellen begannen im Jahr 1902 als Kennedy und Heaviside die beim atlantischen Funkverkehr beobachteten Reflexionen der elektromagnetischen Wellen mit der Existenz einer elektrisch leitfähigen Atmosphäre in Verbindung brachten. Die im vorigen Kapitel diskutierten MHD-Wellen wurden 1942 von Alfvén entdeckt. 1946 erregte Landau Aufsehen mit seiner Theorie zur Dämpfung in dissipationsfreien Plasmen, die wir bereits diskutiert hatten.

Wir haben im vorigen Kapitel bereits die Wellenphänomene in Plasmen im Rahmen einer Ein-Flüssigkeitsbeschreibung behandelt. Dabei haben wir einen neuen Wellentyp, die Alfvén-Wellen, kennengelernt. Im Rahmen der MHD hatten wir uns beschränken müssen auf Phänomene, deren charakteristische Geschwindigkeit von der Massenträgheit der Ionen begrenzt wurde. In diesem Kapitel wollen wir nun auch die mit der Elektronenbewegung verbundenen Wel-

lenphänomene betrachten.

## Vorbemerkungen zur Wellenausbreitung

Bevor wir die Plasmawellen diskutieren, wollen wir noch einige allgemeine Bemerkungen über die Wellenausbreitung machen. Im Folgenden soll die Ausbreitung einer ebenen Welle betrachtet werden, die über einen harmonischen Ansatz beschrieben wird:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

Dabei sind:

$\omega$ .....die Kreisfrequenz des Wellenvorgangs

$k$ .....die Wellenzahl

$\vec{k}$ .....der Wellenvektor

Die Welle propagiert mit einer Phasengeschwindigkeit  $v_{ph}$ , gegeben durch:

$$v_{ph} = \lambda \cdot \nu = \frac{\omega}{k} .$$

Das Verhältnis von Lichtgeschwindigkeit zu Phasengeschwindigkeit wird bekanntlich durch den *Brechungsindex*  $N$  beschrieben:

$$N = \frac{c}{v_{ph}} = \frac{ck}{\omega}$$

Versteht man den Brechungsindex  $N$  als Vektor, so kann damit zugleich auch die Ausbreitungsrichtung der Welle mitbeschrieben werden:

$$\vec{N} = \frac{c}{\omega} \vec{k}$$

Bezüglich des Betrages des Brechungsindex  $N$  gibt es zwei besonders ausgezeichnete Sonderfälle bzw. Singularitäten, nämlich: **Resonanz** und **cut-off** (siehe Abbildung 11.1). Im Fall des Mediums A liegt eine **Resonanz** vor, gekennzeichnet durch:

$$N \rightarrow \infty; \quad v_{ph} \rightarrow 0; \quad \lambda \rightarrow 0; \quad k \rightarrow \infty$$

d. h. die Welle bleibt "stecken". Für das Plasma bedeutet dies i. A. lokale Heizung oder auch Umwandlung einer elektromagnetischen Transversalwelle in eine elektrostatische Longitudinalwelle.

Im Medium B spricht man von einer **cut-off**-Stelle, wobei hier gilt:



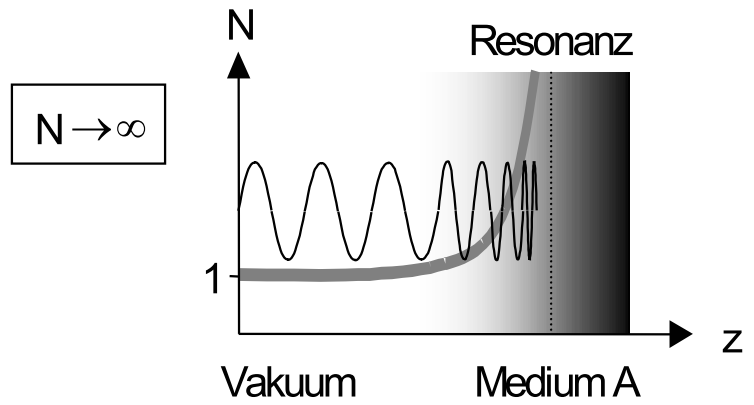
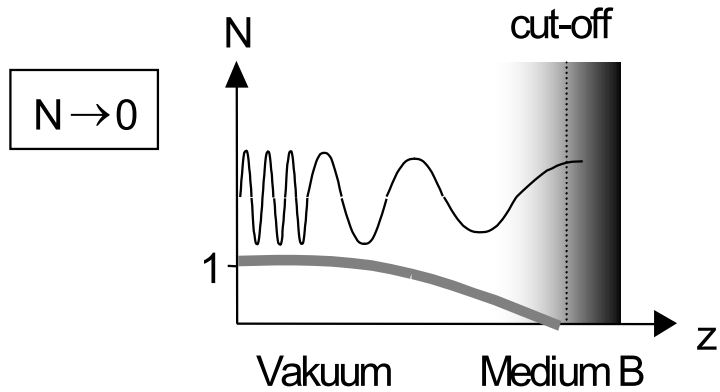


Abbildung 11.1: Zur Erläuterung der Phänomene Resonanz und cut-off



$$N \rightarrow 0; \quad v_{ph} \rightarrow \infty; \quad \lambda \rightarrow \infty; \quad k \rightarrow 0$$

d. h. die Welle wird immer schneller (mit  $v_{ph} \gg c!$ ) und wird schließlich an der Polstelle  $N = 0$  reflektiert.

Das genaue Verhalten des Brechungsindex  $N = N(\omega)$  bzw.  $k = k(\omega)$ , also die Dispersions-eigenschaften des Mediums "Plasma" erhält man aus der Wellengleichung wie im Folgenden beschrieben.

### Allgemeine Wellengleichung (des Plasmas)

Ausgehend von den Maxwell-Gleichungen folgt durch rot-Bildung bzw. Zeitableitung:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\dot{\vec{B}} & |\nabla \times \\ \nabla \times \vec{H} &= \dot{\vec{D}} + \vec{j} & |\partial/\partial t \end{aligned}$$

die allgemeine Form der Wellengleichung:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \mu_0 \dot{\vec{j}} + \epsilon_0 \mu_0 \cdot \ddot{\vec{E}} = 0$$

Hier sind im Gegensatz zu den im vorigen Kapitel diskutierten MHD-Wellen die Verschiebungsströme berücksichtigt. Da wir im Folgenden auch die schnelle Elektronenbewegung betrachten wollen, ist eine relativistische Beschreibung erforderlich. Mit der Vektorumformung:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

ergibt sich weiter:

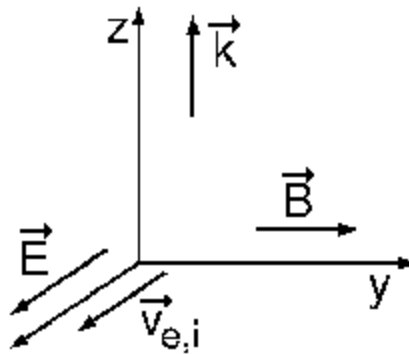
$$\Delta \vec{E} - \nabla \rho / \varepsilon_0 - \mu_0 \dot{j} = \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}}$$

Aus der Gleichung erkennt man die Wirkung des Plasmas: Im Volumen kann jetzt ein realer elektrischer Strom fließen, der als  $dj/dt$  in die Gleichung eingeht. Außerdem findet sich ein Term, der Raumladungsänderungen in Wellenrichtung angibt ( $\nabla \rho$ ). Dies bedeutet offensichtlich ein elektrisches Wellenfeld mit  $\vec{E} \parallel \vec{k}$ , d. h. eine longitudinal polarisierte Welle! Für die eher wichtigeren transversal polarisierten Plasmawellen ( $\vec{E} \perp \vec{k}$ ) würde dieser Term dann verschwinden.

Für die weitere Diskussion betrachten wir eine ebene Transversalwelle in  $\vec{k}$ -Richtung:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

Abbildung 11.2: Geometrie zur Veranschaulichung der Richtungen von  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{v}$  für Transversalwellen



Mit der Wellenzahl  $k$  und der Wellenfrequenz  $\omega$  werden die Orts- bzw. Zeitableitungen zu:

$$\begin{aligned} \partial/\partial t &\rightarrow -i\omega \cdot & \nabla \times &\rightarrow ik \times \\ \partial^2/\partial t^2 &\rightarrow -\omega^2 \cdot & \Delta &\rightarrow -k^2. \end{aligned}$$

Für Transversalwellen mit  $\vec{E} \perp \vec{k}$  ergibt sich damit als Wellengleichung:

$$-k^2 \cdot E + i\omega \cdot \mu_0 \cdot j = \frac{-\omega^2}{c^2} E$$

Gesucht ist nun ein Zusammenhang zwischen  $E$  und  $j$ , um den Stromterm zu eliminieren. Dazu soll zunächst der Fall eines Plasmas ohne Magnetfeld betrachtet werden.

### Wellenausbreitung ohne Magnetfeld

Im einfachsten Fall ohne Magnetfeld im Plasma dient hierzu das Ohmsche Gesetz, wie es aus der Bewegungsgleichung der Elektronen folgt (vgl. Kapitel 9).

$$\vec{E} = \eta \vec{j} - \frac{1}{en_e} \nabla p + \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{d\vec{j}}{dt}.$$

Weiter sollen auch die Stöße weggelassen werden, sodass nur die Trägheit der Elektronen zum Plasmawiderstand beiträgt. Der Term proportional zum Druckgradienten ( $\nabla p \sim \vec{k} p$ ) ist nur für Longitudinalwellen ( $\vec{k} \parallel \vec{E}$ ) relevant. Damit erhält man für den gesuchten Zusammenhang zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{j}$ :

$$\vec{j} = - \left[ \frac{e^2 \cdot n_e}{m_e} \cdot \frac{i}{\omega} \right] \cdot \vec{E},$$

wobei der Klammerausdruck die jetzt rein imaginäre Hochfrequenz (HF)-Leitfähigkeit  $\sigma$  angibt. Setzt man diesen Ausdruck für die Hochfrequenz-Stromdichte in die obige Wellengleichung ein, so folgt weiter:

$$k^2 \cdot \vec{E} + \frac{-i\omega}{\varepsilon_0} \varepsilon_0 \mu_0 \left[ \frac{e^2 \cdot n_e}{m_e} \cdot \frac{i}{\omega} \right] \cdot \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \vec{E}.$$

Dies führt auf die Dispersionsgleichung bzw. den komplexen Brechungsindex  $N$  der Welle:

$$N^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \left( \frac{e^2 \cdot n_e}{\varepsilon_0 \cdot m_e} \right) / \omega^2 .$$

Dabei stellt der Ausdruck in runden Klammern offensichtlich eine (Frequenz)<sup>2</sup> dar. Dies ist die (Elektronen-) *Plasmafrequenz*:

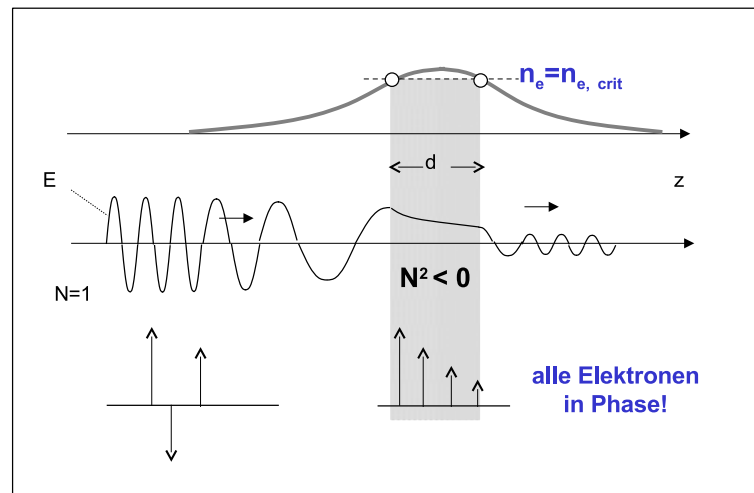
$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 \cdot n_e}{\varepsilon_0 \cdot m_e}} .$$

Ohne Stöße lautet die einfache Dispersionsgleichung eines magnetfeldfreien Plasmas also:

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} .$$

In einem solchen Plasma ist der Brechungsindex zunächst rein reell und kleiner als Eins. Er fällt mit steigender Dichte und verschwindet bei der “kritischen Dichte”. Nach diesem “cut-off-Punkt” ist  $N$  dann rein imaginär ( $N^2 < 0$ ). Für die ausbreitende Welle ergibt sich das in Abbildung 11.3 gezeigte Bild.

Abbildung 11.3: Veranschaulichung des “cut-off” an der kritischen Dichte.



In der Zone mit  $n_e > n_{e,crit}$  ist der Realteil des Brechungsindex (ohne Stöße) = 0, d. h. die Phasengeschwindigkeit der Welle wird unendlich. Zugleich nimmt das elektrische Feld exponentiell ab, gemäß:

$$E = E_0 \cdot e^{i(k_z z - \omega t)} = E_0 \cdot \left( e^{-z/z_0} \right) \cdot e^{-i\omega t}$$

Die E-Feld-Abklinglänge ist dabei dann:

$$z_0 = \frac{c/\omega}{\sqrt{\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 1}} \text{ wobei jetzt: } \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} > 1 \text{ ist.}$$

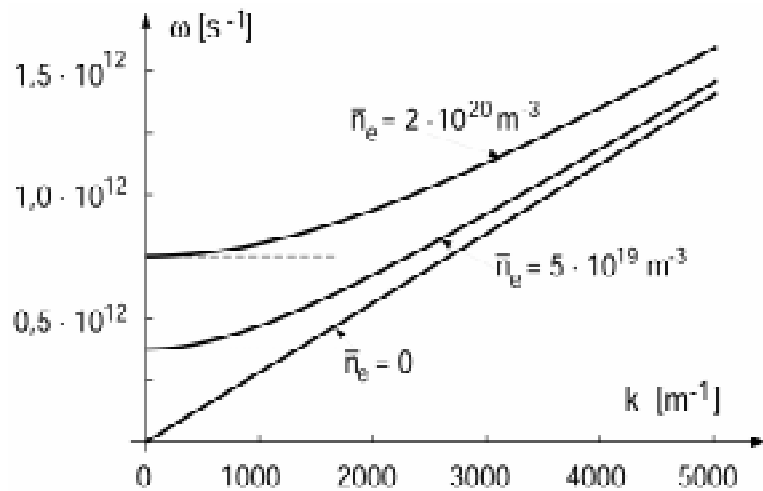
Zu beachten ist: Dieser Abfall stellt keine Dämpfung dar (d. h. keine Absorption!), vielmehr wird die jeweils "fehlende" Wellenenergie rückreflektiert. Falls die *Evaneszenz-Strecke*  $d$  eine endliche Dimension besitzt, "tunnelt" ein entsprechender Wellenteil durch diese Zone hindurch (vgl. Abbildung 11.3). Die unendliche Phasengeschwindigkeit ist dabei dann als synchrone Schwingung aller Elektronen in diesem Bereich zu deuten.

Die Dispersionsrelation für die Wellenausbreitung in Plasmen ohne Magnetfeld

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_{pe}^2$$

ist in Abbildung 11.4 dargestellt.

Abbildung 11.4: Dispersionsrelation für Wellen in Plasmen ohne Magnetfeld



Wellenausbreitung für  $k \rightarrow 0$  ist, wie oben diskutiert, nur möglich für Frequenzen größer als die Plasmafrequenz. Die Phasengeschwindigkeit

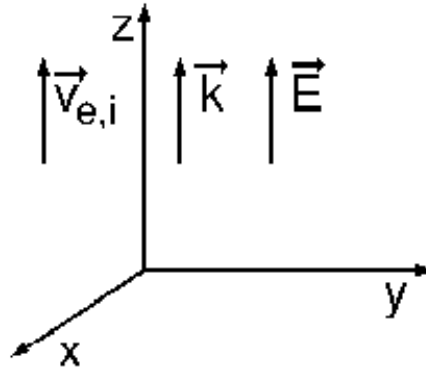
$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}}$$

der Welle wird für  $\omega < \omega_{pe}$  größer als die Lichtgeschwindigkeit. Allerdings wird dadurch natürlich nicht die Tatsache verletzt, dass sich Informationen maximal mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, denn die Gruppengeschwindigkeit

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)}}$$

ist immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit.

Abbildung 11.5: Richtungen von  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  und  $\vec{v}$  im Fall von Longitudinalwellen.



Wir wollen hier kurz auch Longitudinalwellen ohne den Einfluss eines Magnetfeldes diskutieren. Bei den bisher betrachteten Transversalwellen ( $\vec{v} \perp \vec{k}$ ) wurden die Elektronen senkrecht zu  $\vec{k}$  bewegt, wobei die Ionen nicht folgen konnten. Longitudinalwellen mit  $\vec{v} \parallel \vec{k}$  führen zu einer Kompression von Elektronen und Ionen. Da im Allgemeinen Elektronen- und Ionengeschwindigkeiten verschieden sind, treten Raumladungen auf. Daher heißen solche Wellen elektrostatische Wellen. Während wir für die Transversalwellen die Beziehung zwischen Stromdichte und elektrischem Feld aus dem Ohmschen Gesetz (das Resultat der Bewegungsgleichung der Elektronen war) hergeleitet haben, braucht man für die Longitudinalwellen die Bewegungsgleichungen von Elektronen und Ionen. Die zu Beginn des Kapitels abgeleitete Wellengleichung liefert für Longitudinalwellen:

$$\mu_0 \vec{j} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

Mit  $\vec{j} = en_{e,0} (\vec{v}_i - \vec{v}_e)$  findet man

$$\vec{E} = \frac{i}{e\omega} m_e \omega_{pe}^2 (\vec{v}_e - \vec{v}_i)$$

Elektronen- und Ionengeschwindigkeit folgen aus den linearisierten Kraftgleichungen (hier für einfach geladene Ionen und unter Berücksichtigung der Quasineutralität)

$$\begin{aligned} -i\omega m_e n_{e,0} \vec{v}_{e,1} + en_{e,0} \vec{E}_1 + ik \vec{p}_{e,1} &= 0 \\ -i\omega m_i n_{e,0} \vec{v}_{i,1} - en_{e,0} \vec{E}_1 + ik \vec{p}_{i,1} &= 0 \end{aligned} .$$

Mit dem Adiabategesetz (in linearisierter Form)

$$-i\omega p_1 = -\gamma p_0 (i\vec{k}\vec{v}_1)$$

folgt (unter Ausnutzung von  $\vec{k} \parallel \vec{v}_1$ ):

$$\vec{v}_{e,1} = -\frac{ie}{\omega m_e} \frac{\vec{E}_1}{\left(1 - \frac{k^2 c_e^2}{\omega^2}\right)}$$

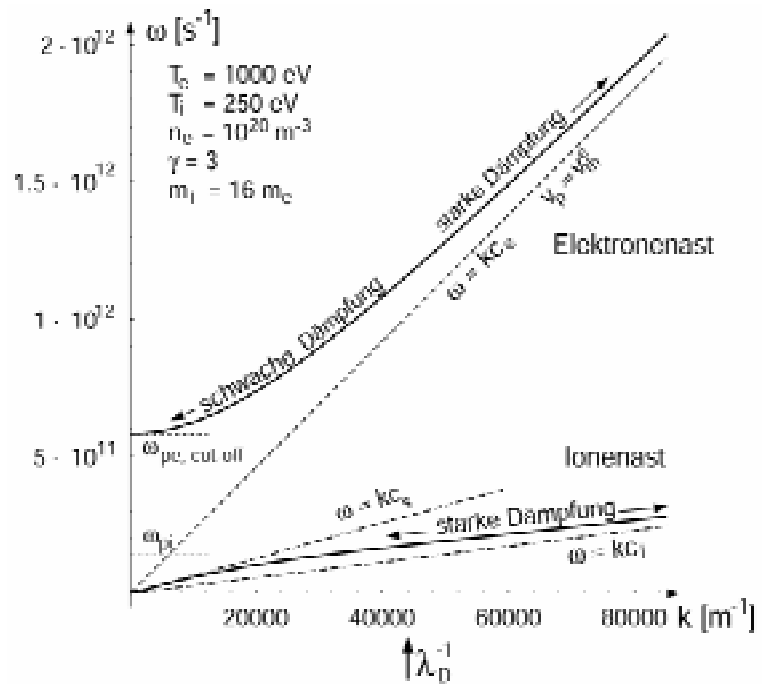
$$\vec{v}_{i,1} = \frac{ie}{\omega m_i} \frac{\vec{E}_1}{\left(1 - \frac{k^2 c_i^2}{\omega^2}\right)}$$

wobei  $c_e = \sqrt{\frac{\gamma T_{e,0}}{m_e}}$ .

Damit findet man aus der Wellengleichung die Dispersionsrelation für longitudinale Wellen

$$\left(k^2 c_e^2 - \omega^2 + \omega_{pe}^2\right) \left(k^2 c_i^2 - \omega^2 + \omega_{pi}^2\right) = \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2$$

Abbildung 11.6: Dispersionsrelation für Longitudinalwellen in magnetfeldfreien Plasmen.



Eine graphische Darstellung dieser Dispersionsrelation gibt Abbildung 11.6. Für sehr hohe Frequenzen ( $\omega \gg \omega_{pi}, \omega^2 \gg k^2 c_i^2$ ) findet man den sogenannten Elektronenast mit der Dispersionsrelation

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c_e^2 .$$

Diese Dispersionsrelation ist sehr ähnlich der für Transversalwellen, wobei jedoch hier statt

der Lichtgeschwindigkeit die Elektronenschallgeschwindigkeit die Maximalgeschwindigkeit ist. Für kleine Wellenzahlen finden wir wieder den cut-off für Frequenzen unterhalb der Elektronenplasmafrequenz wie bei den vorher betrachteten Transversalwellen. Wie auch für diese Wellen finden wir beim Elektronenast der Longitudinalwellen, dass nur die Elektronen gegen den ruhenden Ionenhintergrund schwingen. Allerdings gibt es auch Longitudinalwellen mit  $\omega < \omega_{pe}$ . Wenn wir die Dispersionsrelation für kleine Frequenzen ( $\omega \ll \omega_{pe}, \omega \ll kc_e$ ) auswerten, erhalten wir

$$\omega^2 = \frac{k^2 c_e^2}{k^2 c_e^2 + \omega_{pe}^2} \omega_{pi}^2 + k^2 c_i^2 .$$

Die durch diese Dispersionsrelation beschriebenen Wellen sind mit der Ionenbewegung verknüpft. Für kleine Wellenlängen (große  $k$ ) finden wir als Dispersionsrelation

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 + k^2 c_i^2$$

ganz analog zur Dispersionsrelation im Elektronenzweig. Für große Wellenlängen (größer als die Debye-Länge  $\lambda_D$ ) können Elektronen- und Ionenbewegung nicht mehr entkoppeln (Quasineutralität!) und man findet nur noch Schallwellen analog zu idealen Gasen.

## Wellenausbreitung mit Magnetfeld

Die Einführung eines Magnetfeldes führt eine neue ausgezeichnete Richtung (parallel bzw. senkrecht zu  $\vec{B}$ ) ein. Bei Transversalwellen, die sich parallel zum Magnetfeld ausbreiten ( $\vec{k} \parallel \vec{B}$ ), spielt der Plasmadruck keine Rolle, weil die Auslenkung ( $\vec{v} \parallel \vec{E}$ ) senkrecht zum Wellenvektor  $\vec{k}$  ist (Abbildung 11.7):

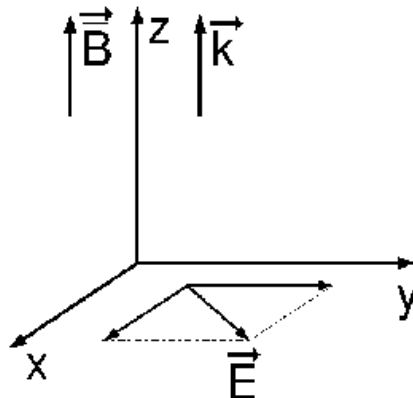
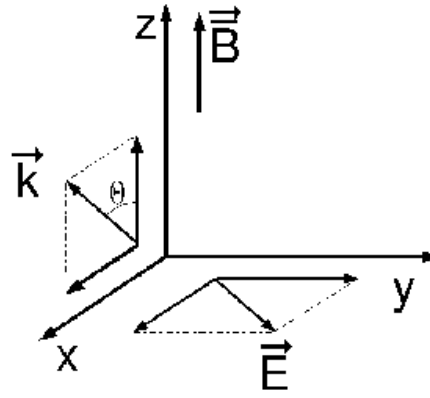


Abbildung 11.7: Geometrie für Transversalwellen mit Ausbreitung parallel zum Magnetfeld

Für Ausbreitung senkrecht zum Magnetfeld gibt es allerdings keine Entkopplung zwischen Transversal- und Longitudinalwellen mehr. Die Auslenkung des Plasmas hat dann eine Komponente parallel zum Wellenvektor, was zu einer Plasmakompression führt. Allerdings folgt aus einer Plasmabewegung parallel zu  $\vec{k}$  (die hier senkrecht zu  $\vec{B}$  ist) wegen der Lorentz-Kraft immer auch eine Bewegung senkrecht zu  $\vec{k}$  und  $\vec{B}$ . Die Geometrie ist in der Abbildung 11.8 dargestellt.



Abbildung 11.8: Transversal- und Longitudinalwellen koppeln, wenn die Ausbreitung nicht parallel zum Magnetfeld ist. Für die im Text betrachtete Ausbreitung senkrecht zum Magnetfeld ist  $\Theta = \pi/2$ .



Für diesen Fall ist die Ableitung der entsprechenden Dispersionsrelation so kompliziert, dass wir uns im Folgenden auf kalte Plasmen beschränken ( $c_i = c_e = 0$ ). Die entsprechende Wellengleichung folgt wieder aus dem Ohmschen Gesetz. Wie zuvor vernachlässigen wir Stöße (und daher Resistivität). In der Näherung kalter Plasmen fällt auch der Term proportional zum Druckgradienten heraus. “Kalt” und “stoßfrei” ist eigentlich ein Widerspruch! Lösung: Es muss  $\omega_{HF} \gg \nu_{Stoß}$  gewahrt bleiben (= “stoßfrei”), und es muss der Gyroradius klein gegen die Wellenlänge sein (= “kalt”). Diese Bedingungen sind für kalte Plasmen (wenige eV) in der Regel gut erfüllt. Man erhält somit:

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = -\frac{1}{en_e} (\vec{j} \times \vec{B}) + \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{d\vec{j}}{dt}.$$

Wie bereits in der MHD finden wir aus dem Ohmschen Gesetz wegen des Hall-Terms keine lineare Beziehung zwischen Stromdichte und elektrischem Feld mehr. Wir führen daher einen Leitfähigkeitstensor  $\vec{\sigma}$  ein:

$$\vec{j} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$$

Damit folgt die Wellengleichung

$$-\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} - i\omega \cdot \mu_0 \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

oder bei Verwendung des Dielektrizitätstensors

$$\vec{\epsilon} = \vec{1} + \frac{i}{\epsilon_0 \cdot \omega} \cdot \vec{\sigma}$$

$$-\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) \equiv \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}.$$

Der  $\epsilon$ -Tensor wiederum ist darstellbar (längere Herleitung, vgl. Lehrbücher, z. B. *Stix*) als:

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}.$$

Die Lösung der Wellengleichung (*Appleton-Hartee-Form*) gibt eine Gleichung vierten Grades in  $N$  ( $N = ck/\omega$ , Brechungsindex):

$$A \cdot N^4 + B \cdot N^2 + C = 0$$

mit:

$$A = S \cdot \sin^2 \Theta + P \cdot \cos^2 \Theta$$

$$B = R \cdot L \cdot \sin^2 \Theta + P \cdot S \cdot (1 + \cos^2 \Theta)$$

$$C = P \cdot R \cdot L$$

( $\Theta$  gibt den Winkel zwischen Wellenvektor  $\vec{k}$  und Magnetfeld  $\vec{B}$  an)

Damit gibt es zwei Lösungen für  $N^2$ , nämlich:

$$N_{1,2}^2 = \frac{B \pm F}{2A}$$

mit:  $F^2 = (RL - PS)^2 \sin^4 \Theta + 4P^2 D^2 \cos^2 \Theta$

$N_1$  heißt die **“langsame Welle”** (**“slow wave”**)

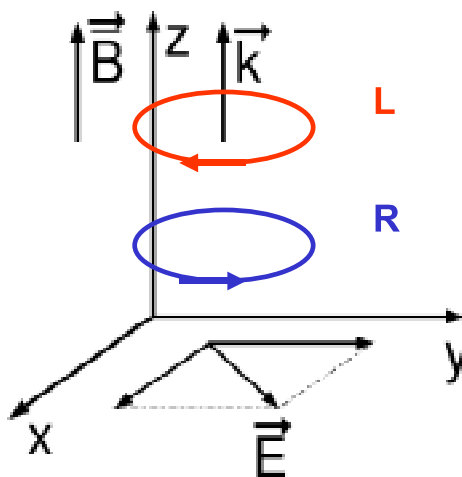
$N_2 (< N_1)$  die **“schnelle Welle”** (**“fast wave”**)

## Wellenausbreitung parallel zum Magnetfeld

Um Transversalwellen mit Ausbreitung parallel zum Magnetfeld zu betrachten, setzen wir  $\Theta = 0$  und finden als Lösungen: die langsame Welle mit  $N^2 = L$  und die schnelle Welle  $N^2 = R$ .  $L$  und  $R$  bedeuten hier links- bzw. rechts polarisiert, d. h. der  $\vec{E}$ -Vektor rotiert senkrecht zu  $\vec{B}$  links bzw. rechts herum, siehe Abbildung 11.9.

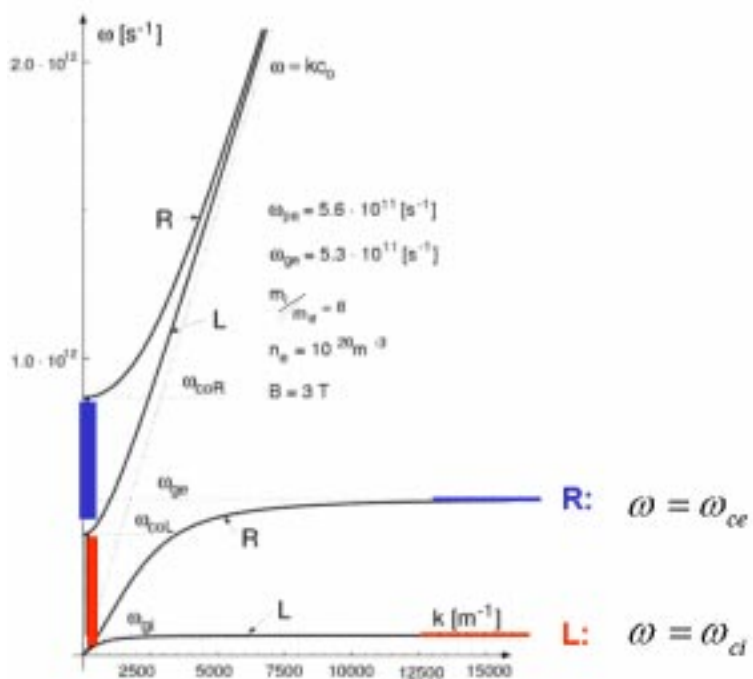
Für die rechtspolarisierte Welle findet man die Resonanzbedingung ( $N \rightarrow \infty$ ) für  $\omega = \omega_{ce}$ , die Elektronen-Zyklotron-Resonanz. Wenn man die Dispersionsrelation für Transversalwellen mit Ausbreitungsrichtung senkrecht zum Magnetfeld graphisch darstellt, findet man das in Abbildung 11.10 dargestellte Bild (um die Darstellung zu vereinfachen, wurde für das Massenverhältnis  $m_i/m_e = 8$  gewählt). Wir finden, dass sich (im Gegensatz zu magnetfeldfreien Plasmen)

Abbildung 11.9: rechts (R) und links (L) polarisierte Welle bei Wellenausbreitung parallel zum Magnetfeld



auch Wellen mit Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz ausbreiten können. Allerdings existiert ein "verbotenes" Gebiet zwischen Resonanz- und cut-off-Frequenz. Das rot eingezeichnete Gebiet ist verboten für links - das blau eingezeichnete Gebiet für rechtszirkulierte Wellen.

Abbildung 11.10: Dispersionsrelation für Wellenausbreitung parallel zum Magnetfeld



Wir wollen den verbotenen Frequenzbereich an Hand der rechtszirkulierten Welle genauer diskutieren. Wir finden einen reellen Brechungsindex für

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < \frac{\omega_{ce}}{\omega}$$

Wenn wir uns lediglich auf hohe Frequenzen beschränken ( $\omega \gg \omega_{ci}$ ), finden wir für linkszirkulierte Wellen einen reellen Brechungsindex für

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\omega} - 1 < \frac{\omega_{ce}}{\omega}$$

Allgemein sind die cut-off-Frequenzen durch folgenden Ausdruck gegeben

$$2\omega_{C0} = \mp\omega_{ce} \pm \omega_{ci} + \sqrt{\omega_{ce}^2 + 2\omega_{ce}\omega_{ci} + 4\omega_{pe}^2} .$$

## Wellenausbreitung senkrecht zum Magnetfeld

Für Wellenausbreitung senkrecht zum Magnetfeld hatten wir schon oben diskutiert, dass eine Unterscheidung in Longitudinal- und Transversalwellen nicht mehr sinnvoll ist. Wir finden aus der Dispersionsrelation mit  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  die sogenannte ordentliche Welle (O-Mode) für den Fall  $\vec{E} \parallel \vec{B}$  mit

$$N_2 = P$$

und die außerordentliche Welle (X-Mode) für den Fall  $\vec{E} \perp \vec{B}$

$$N_1 = RL/s$$

Mit dem Ausdruck  $P = 1 - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2$  findet man also (wie bereits oben diskutiert), dass das Magnetfeld für  $\vec{E} \parallel \vec{B}$  keine Rolle spielt. Die Wellenausbreitung erfolgt wie in nichtmagnetisierten Plasmen. Für die X-Mode erhält man die Dispersionsrelation

$$\frac{k^2 c_0^2}{\omega^2} = \frac{(\omega^2 - \omega\omega_{ce} - \omega_{ce}\omega_{ci} - \omega_{pe}^2)(\omega^2 + \omega\omega_{ce} - \omega_{ce}\omega_{ci} - \omega_{pe}^2)}{(\omega^2 - \omega_{UH}^2)(\omega^2 - \omega_{OH}^2)} .$$

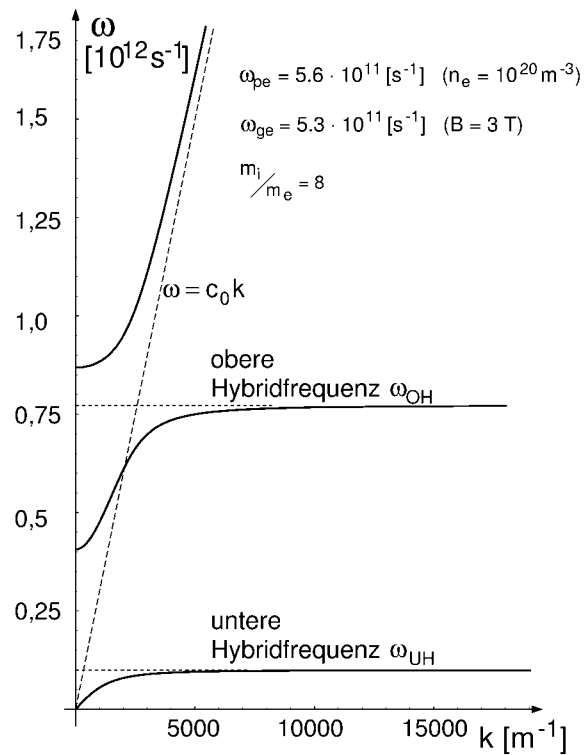
Die graphische Darstellung (Abbildung 11.11, wie vorher mit  $m_i/m_e = 8$ ) zeigt die aus der Dispersionsrelation leicht ersichtlichen zwei Resonanzfrequenzen an der oberen ( $\omega_{OH}$ ) und unteren ( $\omega_{UH}$ ) Hybridfrequenz. Außerdem finden wir zwei cut-off-Frequenzen. Für sehr große Frequenzen finden wir wieder etwa die Dispersionsrelation für die Lichtwelle.

Die untere Hybridfrequenz

$$\omega_{UH}^2 = \frac{\omega_{ce}\omega_{ci}(\omega_{ce}\omega_{ci} + \omega_{pe}^2)}{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2}$$

ist neben den Zyklotron-Resonanzfrequenzen wichtig für die Heizung in Fusionsplasmen. Wenn die Plasmafrequenz viel größer ist als die Elektronen-Zyklotron-Frequenz, dann ist sie einfach das geometrische Mittel der beiden Gyrationfrequenzen

Abbildung 11.11: Dispersionsrelation für Wellenausbreitung senkrecht zum Magnetfeld



$$\omega_{UH} \approx \sqrt{\omega_{ce}\omega_{ci}} \quad (\omega_{pe} \gg \omega_{ce})$$

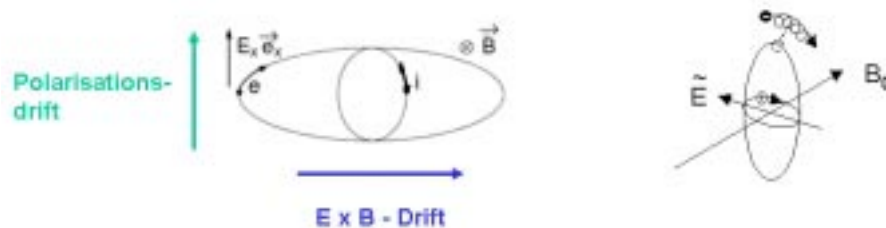


Abbildung 11.12: Elektronen- und Ionenbahn für den Fall der unteren Hybridresonanz.

Die Bewegung von Elektronen und Ionen ist bei dieser Resonanz durch das elektrische Feld gekoppelt. Bei periodischem elektrischem Feld ergibt sich für die Elektronenbahn aus der Überlagerung von Polarisationsdrift ( $\sim \frac{d\vec{E}}{dt}$ ) und der  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift eine Ellipsenbahn (siehe Abbildung 11.12). Die Ionen sind wegen der hohen Frequenzen unmagnetisiert (d. h. der Einfluss des Magnetfeldes auf die Ionenbahn ist klein). Aus der Bewegung von Elektronen und Ionen in Richtung des elektrischen Feldes kann man unter der Bedingung  $\omega_{pe} \gg \omega_{ce}$  (dynamische Abschirmung der Coulomb-Wechselwirkung spielt keine Rolle) die untere Hybridfrequenz berechnen: Die unmagnetisierten Ionen folgen dem elektrischen Feld, die entsprechende Bewegungsgleichung ist durch

$$m_i \frac{v_{ix}}{dt} = eE_x$$

gegeben. Die Elektronen sind stark magnetisiert, d. h. sie führen viele Gyrationenbewegungen

aus bevor sich das elektrische Feld wesentlich ändert. Da das elektrische Feld der Welle senkrecht zum Magnetfeld steht, können die Elektronen dem  $\vec{E}$ -Feld nicht folgen, sie führen wegen der Kraft senkrecht zum Magnetfeld Driftbewegungen aus: in  $x$ -Richtung die Polarisationsdrift aufgrund der Zeitabhängigkeit des elektrischen Feldes, die entsprechende Bewegungsgleichung lautet

$$v_{pe} = -\frac{m_e}{eB^2} \frac{dE_x}{dt} ,$$

in  $y$ -Richtung die  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift.

Die Integration der Bewegungsgleichungen in  $x$ -Richtung liefert mit  $E_x(t) = E_{x0} \sin \omega t$

$$x_i = x_{i0} - \frac{e}{m_i \omega^2} E_{x0} \sin \omega t$$

$$x_e = x_{e0} - \frac{m_e}{eB^2} E_{x0} \sin \omega t$$

Elektronen und Ionen bewegen sich in  $x$ -Richtung in Phase für  $\omega^2 = \frac{e^2 B^2}{m_i m_e}$ , was genau der unteren Hybridfrequenz (für  $\omega_{pe} \gg \omega_{ce}$ ) entspricht.

Die zweite Resonanzbedingung, die obere Hybridfrequenz ist gegeben durch

$$\omega_{OH}^2 = \omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 .$$

Für diese Frequenzen kann man die Ionen als unbeweglichen Hintergrund betrachten.

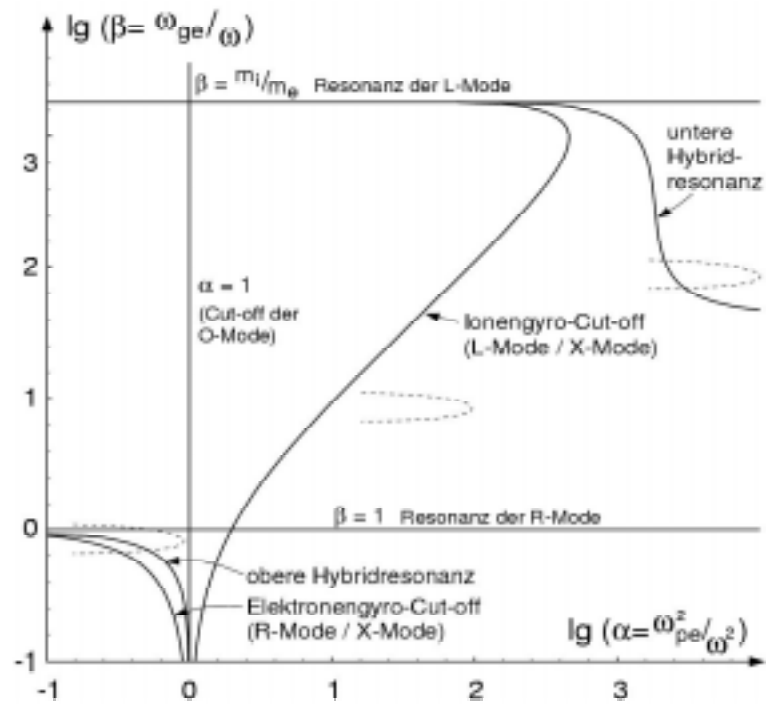
## Zusammenfassung Wellenausbreitung mit Magnetfeld

Für die Wellenausbreitung mit Magnetfeld (für kalte Plasmen) finden wir folgende cut-offs und Resonanzen für  $\vec{k} \parallel \vec{B}$  und  $\vec{k} \perp \vec{B}$

	$\vec{k} \parallel \vec{B}$	$\vec{k} \perp \vec{B}$
$\vec{E} \parallel \vec{B}$	<p><math>\hat{=}</math> Longitudinalwelle ohne Magnetfeld: keine Resonanz</p>	<p><math>\hat{=}</math> Transversalwelle ohne Magnetfeld: keine Resonanz</p>
	Cut-off: $\omega_{pe}$	
$\vec{E} \perp \vec{B}$	<p>Transversalwelle mit Magnetfeld: Resonanzen bei: <math>\omega_{ci}, \omega_{ce}</math></p>	<p>gemischt longitudinal und transversal: Resonanzen bei: <math>\omega_{UH}, \omega_{OH}</math></p>
	Cut-offs: $2\omega_{Co} = \mp \omega_{ce} \pm \omega_{ci} + \sqrt{\omega_{ce}^2 + 2\omega_{ce}\omega_{ci} + 4\omega_{pe}^2}$	

Eine graphische Übersicht der cut-offs und Resonanzen ist in Abbildung 11.13 zusammengestellt.

Abbildung 11.13: Übersicht über die cut-offs und Resonanzen für Wellenausbreitung in Plasmen mit Magnetfeld



Hier wurde eine doppelt-logarithmische Darstellung gewählt, um ein realistisches Massenverhältnis  $m_i/m_e$  zu verwenden. Die Koordinate  $\alpha = \omega_{pe}^2/\omega^2$  ist proportional zur Plasmadichte, während  $\beta = \omega_{ce}/\omega$  proportional zum Gleichgewichts-Magnetfeld ist.





# Kapitel 12

## Hochfrequenz-Entladungen

Der Einsatz von Hochfrequenz zur Erzeugung von Prozessplasmen im Niederdruckbereich hat sich bereits in vielen Fällen als überlegene, z. T. einzig brauchbare Lösung erwiesen. Infolgedessen soll auch das HF-Plasma an dieser Stelle ausführlicher behandelt werden. Etwas vereinfacht, lassen sich Wirkung und Vorteile der HF-Entladung wie folgt zusammenfassen.

- Durch Aufprägen eines hochfrequenten Wechselfeldes vollführen die Elektronen Oszillationsbewegungen von (gegeben durch E-Amplitude und Frequenz) üblicherweise sehr kleiner Amplitude ( $\ll$  Gefäßdimensionen). Liegt Reibung vor (= Stöße!) folgt eine kontinuierliche Energieaufnahme. Die Elektronen beginnen zu ionisieren und es stellt sich letztlich ein Gleichgewicht zwischen Ionisationsrate und Verlustrate der Teilchen ein. Offensichtlich sind damit Kathodenmechanismen (Glimmentladung, Bogen) nicht unbedingt nötig. Damit lassen sich saubere und über große Dimensionen homogene Plasmen erzeugen.
- Durch die verschiedenen Möglichkeiten der HF-Anregung (kapazitive/induktive Einkopplung, Wahl der Frequenz, gegebenenfalls Hinzunahme von Magnetfeldern) lässt sich das Energiespektrum beeinflussen und u. U. für eine optimale Plasmachemie einrichten. Die Elektronen weisen in diesen Fällen eine deutliche Abweichung von der Maxwell-Verteilung auf (Anmerkung: streng genommen kann man dann nicht mehr von einer Plasma-“Temperatur” sprechen).
- Da der HF-Strom auch als Verschiebungsstrom in die Elektroden fließen kann, können auch isolierende Schichten aufgetragen werden.
- Bei induktiver HF-Einkopplung fallen Elektroden völlig weg (Neue Entwicklungen von HF-Lampen mit sehr hoher Lebensdauer, verbesserte Plasmaätzverfahren).

Abbildung 12.1 zeigt die verschiedenen Möglichkeiten der HF-bzw. Mikrowellen-Einkopplung.

Wichtige Kenngröße für die HF-Plasmaerzeugung ist die jeweils absorbierte HF-Leistung, die sehr einfach aus der Bewegungsgleichung des Einzelelektrons folgt:

$$m_e \cdot \ddot{x} + \nu_{Sto\beta} \cdot (m_e \cdot \dot{x}) = -e \cdot E_0 \cdot e^{i\omega t}$$

Dabei gibt der mittlere Term (Stoßfrequenz  $\times$  Impuls) die auf das Elektron einwirkende Reibungskraft an. Der erste Term, der die Beschleunigung des Elektrons beschreibt, wurde bei der Betrachtung des Gleichstromfalls in Kapitel 4 vernachlässigt. Mit dem Ansatz  $x = x_0 e^{i\omega t}$  erhält

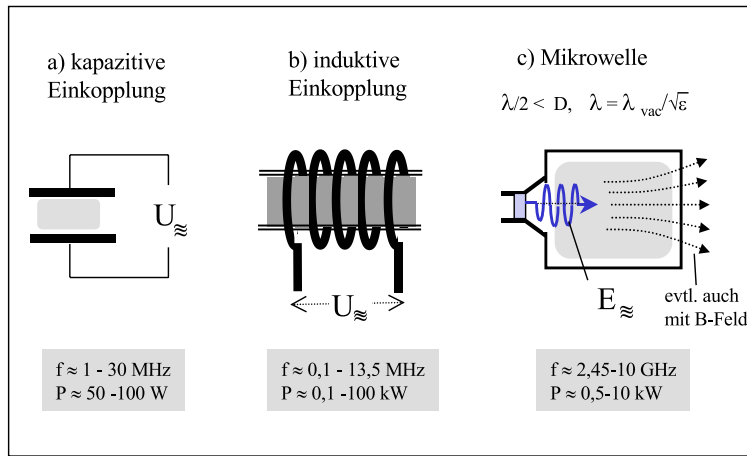


Abbildung 12.1: Verschiedene Möglichkeiten der HF-Einkopplung in Plasmen

man analog zum Gleichstromfall:

$$j_{DC} = n_e \cdot \frac{e^2 \cdot E_0}{m_e} \cdot \frac{1}{\nu} \rightarrow j_{HF0} = n_e \cdot \frac{e^2 \cdot E_0}{m_e} \cdot \frac{1}{\nu + i\omega}$$

bzw. umgeschrieben:

$$j_0 = n_e \cdot \frac{e^2 \cdot E_0}{m_e} \cdot \left\{ \frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} + i \cdot \frac{-\omega}{\nu^2 + \omega^2} \right\}$$

Mit  $j = \sigma \cdot E$  lässt sich damit auch sofort die (komplexe) HF-Leitfähigkeit angeben, nämlich:

$$\sigma_{HF} = n_e \cdot \frac{e^2}{m_e} \cdot \left\{ \frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} + i \cdot \frac{-\omega}{\nu^2 + \omega^2} \right\}$$

Auch die absorbierte HF-Leistung ergibt sich unmittelbar gemäß:

$$P_{abs} = \operatorname{Re}(j) \cdot \operatorname{Re}(E)$$

$$P_{abs} = n_e \cdot \frac{e^2 \cdot E_0^2}{2m_e} \cdot \left( \frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} \right)$$

Diese Formel für die **Stoßdämpfung** ( $P_{abs} > 0$  nur für  $\nu_{Stoß} \neq 0!$ ) lässt sich auf den DC-Fall zurückführen durch Definition einer "Effektiven Feldstärke":

$$E_{eff}^2 \equiv \frac{E_0^2}{2} \cdot \frac{\nu^2}{\nu^2 + \omega^2}$$

Der Faktor 1/2 ergibt sich durch die Mittelwertbildung über eine harmonische Schwingung.

Aus der Dämpfungs-Formel erkennt man sofort, dass nur bei endlicher Stoßfrequenz ( $\nu > 0$ ) Leistung aufgenommen wird. Bei hohen Gasdichten ( $\nu^2 \gg \omega^2$ ) nimmt die Leistung umgekehrt zum Fülldruck (Gasdichte) ab. Bei geringen Dichten ( $\nu^2 \ll \omega^2$ ) nimmt die absorbierte HF-Leistung linear mit der Dichte zu. Hohe Frequenzen reduzieren die Leistungsaufnahme drastisch ( $P_{abs} \propto 1/\omega^2$ ). Im Bereich  $\nu \sim \omega$  erreicht die Leistungsaufnahme - wie man aus der Formel gleichfalls entnimmt - einen Maximalwert.

Diese Betrachtung hat allerdings noch einen Schönheitsfehler: Die in die Gleichung für die Absorption einzusetzende (lokale) HF-Feldstärke lässt sich an sich nicht so ohne weiteres vorgeben! Das **E-Feld** muss vielmehr **selbstkonsistent** berechnet werden. Dazu ist das Eindringen des Wellenfeldes (bzw. HF-Feldes) als Funktion der Plasmaparameter zu berechnen. Da die Plasmaparameter nun selbst wieder von dem Leistungseintrag abhängen, führt dies sofort auf ein in der Regel komplexes nicht-lineares Problem. Man kann dazu die folgenden Fälle unterscheiden.

- Bei der kapazitiven HF-Einkopplung im Bereich mäßiger Frequenzen (d. h. Megahertz-Bereich, keine Wellen!) wird der gesamte "Elektronen-Körper" im HF-Feld hin- und herbewegt, wobei immer an der abstoßenden Elektrode ein "Elektronen-Vakuum" entsteht. Dort baut sich der wesentliche Teil der angelegten HF-Spannung auf, während Spannungsabfall bzw. E-Feld im Plasma-bulk entsprechend kleine Werte annehmen. Für die Volumenheizung wäre dann nur dieses geringe (Volumen-)E-Feld in die  $P_{abs}$ -Formel einzusetzen. Ein brauchbares quantitatives Ergebnis erhält man mit Hilfe von Monte-Carlo-Rechnungen der Elektronenbewegung (d. h. die Stöße werden "ausgewürfelt") und gleichzeitiger Lösung der Poissongleichung. Abbildung 12.2 zeigt für das so berechnete Orts-/Zeitverhalten der Elektronenwolke.

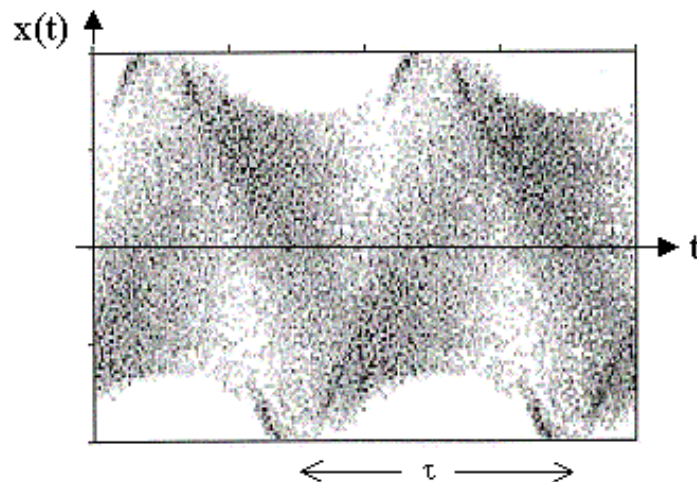


Abbildung 12.2: Ergebnis einer Monte-Carlo-Rechnung für ein Plasma mit kapazitiver HF-Einkopplung

- Bei induktiver HF-Einkopplung ist die Eindiffusion des HF-Stromes zu betrachten. Mit zunehmender Frequenz folgt eine zunehmende Randheizung des Plasmas (Skinneffekt).
- Im Fall von Mikrowellen-Einstrahlung dringt das E-Feld als elektromagnetische Welle i. A. sehr viel besser in das Plasma ein. Voraussetzung ist allerdings, dass die Wellenfrequenz größer als die Plasmafrequenz bleibt. Das in diesem Fall gute Eindringen der

Mikrowellen kann den ungünstigen Frequenz-Effekt ( $P_{abs} \propto 1/\omega^2$ ) weit überkompensieren.

## Die HF-Randschicht

Anknüpfend an das Bild der oszillierenden Elektronenwolke ist noch ein wichtiges Detail des kapazitiv gekoppelten HF-Plasmas nachzutragen. Dies ist zunächst die sogenannte “*HF-Randschicht*”, die sich einstellt, wenn die gewählte Frequenz unter einem charakteristischen Wert bleibt. In diesem Fall können die Ionen in der Phase, in der die Elektronen von der (gerade negativen) Elektrode abheben (siehe Abbildung 12.2) die Randschicht unter starker Beschleunigung durch-eilen und die Elektrode noch rechtzeitig erreichen. Die Folge ist ein hochenergetischer Ionenbeschuss mit Energien von typisch 0,5-1 keV (d. h. im Wesentlichen entsprechend der vollen HF-Spannungsamplitude). Dieses Ionenbombardement hat große Bedeutung in der Plasmatechnologie z. B. für das Plas-mätzen.

Ist dagegen die Zeitdauer zu kurz, so erreichen die Ionen nicht die Elektrode, da die Feld-richtung rechtzeitig umpolt. Dies ist der Fall, wenn die Betriebsfrequenz oberhalb der Ionen-plasmafrequenz liegt ( $\omega > \omega_{pi}$ ). Dies ist leicht zu verstehen: Auf der Zeitskala der Plasmafrequenz (in diesem Fall die der Ionen) durchlaufen die Ladungsträger gerade die Distanz der Debye-Länge ( $\approx$  Randschicht!), bei entsprechend höherer Frequenz reicht die Zeit also nicht! In technischen “kapazitiven” HF-Plasmen mit  $n_e$ -Werten im Bereich von  $10^{16} m^{-3}$  liegt die Ionenplasmafrequenz im Bereich von einigen MHz ( $\omega_{pi}/\omega_{pe} \propto (m_e/m_i)^{1/2}$ ). Dementsprechend liegt der Übergangsbereich zwischen schnellen HF-Ionen und energiearmen Ionen etwa bei diesen Frequenzen (5-10 MHz).

Das Wechselspiel zwischen Elektronenstrom und (eventuellem) Ionenbeschuss auf die jeweilig zuständige Elektrode ist in Abbildung 12.3 skizziert.

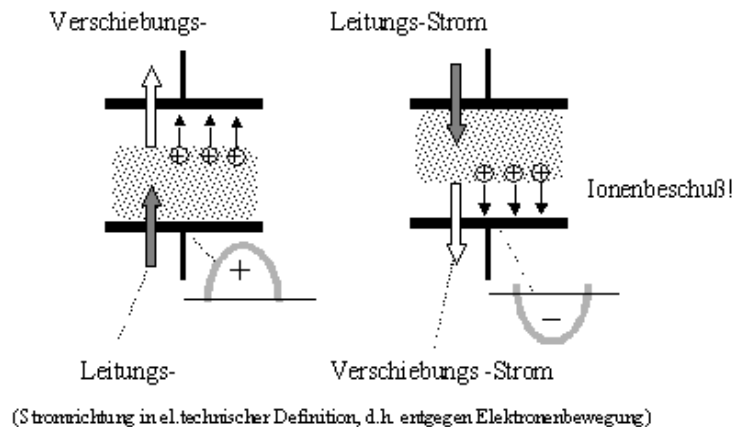


Abbildung 12.3: Bewegung des gesamten Plasmakörpers und Ausbildung eines entsprechenden HF-Randpotentials

Der resultierende HF-Strom durch die Entladungsstrecke fließt dann auf der “Elektronenseite” (jeweilige Anode) als Leitungsstrom, während auf der “Ionenseite” (Kathode) zu wesentlichen Teilen ein Verschiebungsstrom fließt. Dementsprechend bildet sich jeweils auf der Kathoden-

seite ein HF-Potential aus, das nahezu die gesamte angelegte HF-Spannung ausmacht (bis einige 100V). Schaffen es die Ionen, in "ihrer Halbwelle" das sich beschleunigende Potential zu durchmessen, kommt es zu einem energiereichen Ionen-Beschuss der jeweiligen Elektrode. Ist die Halbwelle zu kurz (d. h. zu hohe Frequenz) bleiben die Ionen niederenergetisch und erhalten nur eine Energie entsprechend dem ambipolaren Potential (vgl. Kapitel "Plasmarandschicht"). Die Übergangsfrequenz zwischen energiereich und ambipolar ist logischerweise die **Ionenplasmafrequenz**. Durch Wahl der Frequenz lässt sich also die Ionenenergie variieren: Bei (je nach Plasmadichte) typisch  $\leq 13,5 \text{ MHz}$   $\rightarrow$  energiereiche Ionen, bei typ.  $> 30 \text{ MHz}$   $\rightarrow$  energiearme Ionen mit Energien des ambipolaren Potentials  $\sim (3 - 4) \times k_B T_e$ . Um die Ionenenergie definiert einstellen zu können, verwendet man inzwischen auch Frequenzkombinationen: HF-Plasmaerzeugung mit einer höheren Frequenz  $f_1$  (gegebenenfalls auch mit Mikrowellen) + "*HF-Bias*" (mit  $f_2 < f_1$ ).

Als wesentliches Ergebnis zum Thema "HF-Randschicht" ist also festzuhalten:

- Energetischer Ionenbeschuss mit  $W \sim U_{HF}$  (200-1000 eV), wenn  $\omega_{HF} < \omega_{pi}$
- Milder Ionenbeschuss (ambipolares Potential, 10-20 eV), wenn  $\omega_{HF} \gg \omega_{pi}$

Für die sehr häufig verwendete Mikrowellenfrequenz von 2,45 GHz (= Betriebsfrequenz des Mikrowellenherdes, daher preisgünstige Komponenten erhältlich!) liegt die Maximalabsorption mit  $\nu \sim \omega$  bei Betriebsdrücken von etwa 100 Pa (= 1 mbar), also in einem für viele plasmachemische Anwendungen optimalen Druckbereich. Als u. U. weiterer Vorteil der Mikrowelle kommt hinzu, dass in diesem Fall die Wellenfrequenz bei allen infrage kommenden Dichten weit über der Ionenplasmafrequenz liegt ( $\omega_{MW} \gg \omega_{pi}$ ). Damit wird ein HF-Randpotential vermieden, und es folgt ein "mildes" Ionenbombardement entsprechend dem ambipolaren Potential von  $e\Phi \sim 3 - 4 k_B T_e \sim 10 - 20 \text{ eV}$  für die dem Plasma ausgesetzten Oberflächen.

Die einfachste Anordnung einer solchen Mikrowellen-Anlage erhält man durch Mikrowelleneinstrahlung in ein mit geringer Gasdichte ( $\sim$  mbar-Bereich) gefülltes Metallgefäß ("evakuierter Mikrowellenherd"). Mit der Bedingung  $\lambda_{MW} < L_{Gefäß}$  stellt diese Anordnung dann einen Hohlraumresonator dar, in dem das gezündete Plasma als Absorber dient. Derartige Anordnungen (*MW-Plasmareaktoren*) werden vielfach zur plasmachemischen Behandlung von Werkzeugen und technischen Produkten eingesetzt (Entfetten, Erzeugung von Oberflächenhaftung von Kunststoffen, Sterilisieren u. a.)

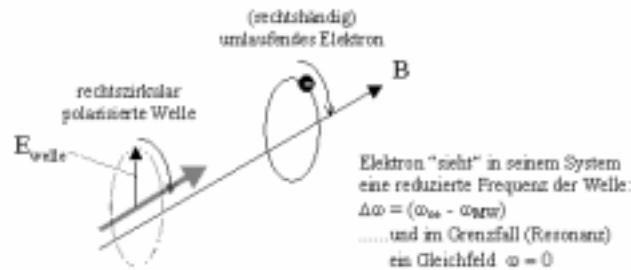
## Mikrowellenplasma mit Magnetfeld: ECR-Plasma

Eine interessante Variante der Mikrowellen-Plasmaerzeugung ergibt sich bei Überlagerung eines **Magnetfeldes**. Es folgen zwei entscheidende Vorteile, nämlich:

- die Mikrowellen können unter bestimmten Bedingungen gut in das Plasma eindringen (Wellenausbreitung auch für  $\omega < \omega_{pe}$ , siehe Kapitel "Wellen im Plasma")
- die Mikrowellen werden bei Vorliegen der Elektronen-Zyklotron-Resonanz (d. h. bei überlagertem Magnetfeld geeigneter Stärke, sodass  $\omega_{MW} = \omega_{ce}$  ist) optimal absorbiert (**ECR-Plasma**)

Der starke Dämpfungsmechanismus einer rechtszirkularen Welle<sup>1</sup> (R-Welle) bei der EC-Resonanz lässt sich anhand von Abbildung 12.4 leicht verstehen.

Abbildung 12.4: Resonanz zwischen Elektronengyration und  $\vec{E}$ -Feld einer rechtszirkularen Welle



Die effektive (d. h. reduzierte) Frequenz ( $\omega_{ce} - \omega_{MW}$ ) ist in die Absorptionsformel einzusetzen, mit dem einfachen Ergebnis:

$$P_{abs} = n_e \cdot \frac{e^2 \cdot E_0^2}{2m_e} \cdot \left( \frac{\nu}{\nu^2 + (\omega_{ce} - \omega)^2} \right) \Rightarrow \propto \left( \frac{1}{\nu} \right)$$

bei Resonanz

Durch die drastische Reduktion des Nenners ergibt sich also in der Nähe bzw. bei der Resonanz eine sehr deutliche Verbesserung der Mikrowellen-Plasmaheizung. Bei Resonanz “sieht” das Elektron sogar ein Gleichfeld und wird solange beschleunigt, bis es einen Stoß erfährt. Bei verschwindender Stoßzahl (Neutralgasdichte  $\rightarrow 0$ ) würde die pro Elektron absorbierte Leistung  $P_{abs}/n_e$  formal demnach sogar divergieren!

(Hier müssten dann aber die Coulomb-Stöße berücksichtigt werden, außerdem ist in realen Systemen der engere Resonanzbereich ( $(\omega_{MW} - \omega_{ce})$ ) von endlicher Abmessung, sodass an die Stelle der Stoßfrequenz die inverse Aufenthaltsdauer zu setzen ist.) Abbildung 12.5 zeigt den Vergleich von nicht-resonanter Absorption (kein Magnetfeld) und ECR-Bedingungen (Resonanz bzw. Fälle nahe der Resonanz) für den Fall eines fest vorgegebenen E-Feldes der R-Welle. Wie die Abbildung zeigt, liegen die Vorteile der ECR-Plasmaerzeugung damit speziell im Bereich kleiner Fülldrücke, d. h. bei kleinen (normierten) Stoßfrequenzen  $\nu/\omega$ . Der angegebene Druckbereich gilt dabei für die allgemein verwendete Mikrowellenfrequenz  $f = 2,45 \text{ GHz}$  (d. h. die zugelassene Industrie- bzw. Haushaltsfrequenz (Mikrowellenherd!)). Das Resonanzmagnetfeld beträgt in diesem Fall 87,5 mT (= 875 Gauß), ist also sehr leicht zu realisieren.

<sup>1</sup>Wie aus der Optik bekannt kann eine linear polarisierte Welle als Überlagerung einer rechts- und einer linkszirkular polarisierten Welle gleicher Amplitude verstanden werden. Technisch (so auch bei Mikrowellen) stellt man zirkular polarisierte Strahlung (z. B. die R-Welle) durch eine 90°-Phasenverschiebung der ungewünschten Drehrichtung (hier die L-Welle) aus der linear polarisierten Welle her (z. B. mit einem  $\lambda/4$ -Plättchen in der Optik).

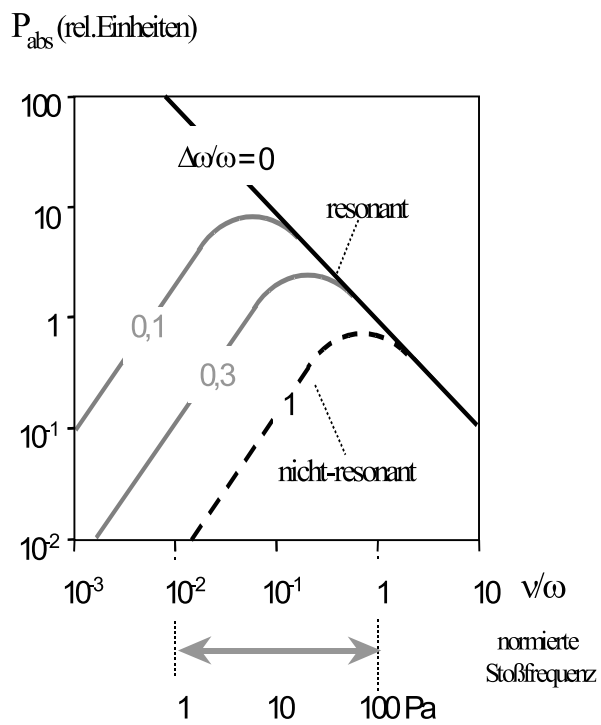


Abbildung 12.5: Vergleich von nahezu resonanter und nicht-resonanter Absorption als Funktion der normierten Stoßfrequenz





# Kapitel 13

## Plasmaanwendungen (Plasmatechnologie)

Niedertemperaturplasmen finden inzwischen breite Anwendung auf vielen technischen Gebieten, wie etwa:

- Lichttechnik
- Schaltertechnik
- Antriebstechnik
- Plasma-Prozesstechnik= - Wärmebehandlung/Fügetechnik  
- Plasmachemie/Stoffwandlung  
- **Oberflächen- & Dünnschichttechnik**

Dabei hat die Plasmatechnik, speziell die Plasmaprozesstechnik - und hier vor allem die Oberflächen- & Dünnschichttechnik - im letzten Jahrzehnt erheblich an Bedeutung gewonnen und ist auf vielen Gebieten sogar zu einer "Schlüsseltechnologie" geworden (Beispiel: Prozessor im PC). Die weltweite Wertschöpfung auf dem Gebiet Plasmatechnologie kann wie folgt abgeschätzt werden:

- Produktionsanlagen: ca. 10 Mrd DM/Jahr
- Plasmaprodukte: 100 Mrd
- Folgeprodukte: 1000 Mrd

Nachfolgend ist eine Auswahl von Plasmaanwendungen in den oben genannten Gebieten zusammengestellt.

Der Plasmaeinsatz zur Lichterzeugung wurde bereits im Kapitel Gasentladungen diskutiert.

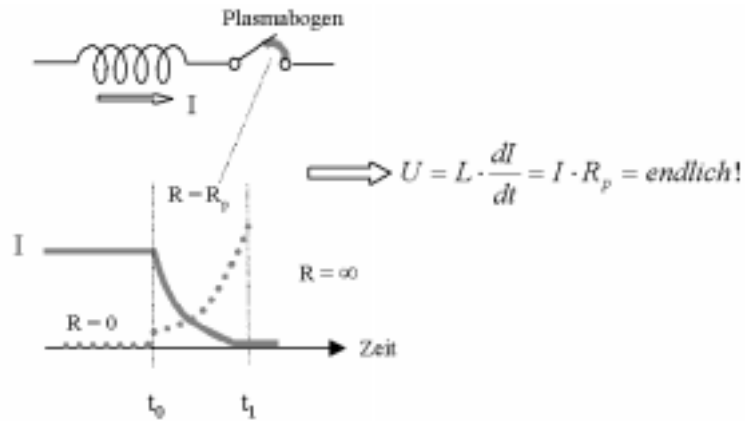
### Schaltertechnik

Elektrische Schalter werden zum Öffnen und Schließen von Stromkreisen benötigt. Sie haben ein Marktvolumen von einigen Mrd. DM (deutsche Produktion). Zum Teil basieren derartige Schalter auf einer ausgereiften Technik, zum Teil finden aber auch noch Entwicklungen bzw. Weiterentwicklungen von Schalterkonzepten statt. Bei allen Schaltern bzw. elektrischen Schaltvorgängen ist das (z. T. kurzzeitige) Auftreten eines Plasmas von entscheidender Bedeutung.

## Öffner:

Jeder Ausschaltvorgang benötigt einen transienten Übergangswiderstand (= Plasma), um die induktiv in der elektrischen Zuleitung gespeicherte Energie  $W = L/2 \cdot I^2$  zu vernichten, da sonst - bei gedachtem, unendlich schnellem Abschalten eines Stromes - eine beliebig hohe Spannungsspitze auftreten würde (Abbildung 13.1).

Abbildung 13.1: Wirkungsweise des Plasmas beim Ausschalter (Begrenzung von Spannungsspitzen)



Ausschalter gibt es in allen Leistungs- bzw. Spannungsklassen:

“Haushaltsspannung”	-	230-380 V .....	einfache Technik
Mittelspannung	-	10 kV .....	Vakuumschalter
Hochspannung	-	100 kV und 200 kV .....	Druckgasschalter ( $SF_6$ )

Für Wechselspannungsnetze ergeben sich dabei erhebliche Vorteile für den Abschaltvorgang: Hier reicht es, wenn die “Wiederverfestigung” (d. h.  $R \Rightarrow \infty$ ) nach ein oder zwei Halbwellen (d. h. 10-20 ms bei 50 Hz) eintritt. Beim folgenden Spannungsnulldurchgang bleibt der Strom dann abgeschaltet. Wesentlich schwieriger ist die Hochleistungs-Gleichstromabschaltung, speziell in Höchstspannungsnetzen. Schalter für Höchstspannungs-Gleichstrom-Übertragung (“HGÜ”) bis 1 MV (für elektrische Fernleitungen) befinden sich noch in der Entwicklung.

Besondere Anforderungen ergeben sich auch bei Notabschaltungen im Kurzschlussfall. Ein millionenfach eingesetzter Notabschalter ist z. B. die “Haushaltssicherung”, deren Wirkungsprinzip in Abbildung 13.2 dargestellt ist.

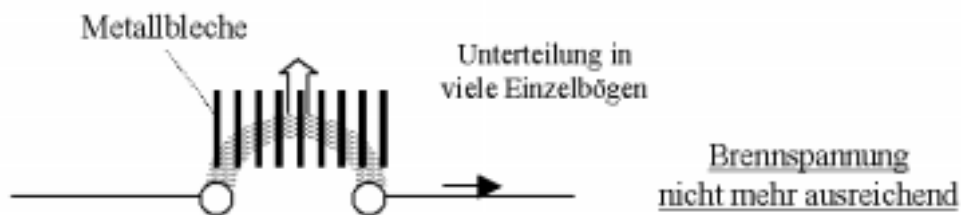


Abbildung 13.2: Prinzipschaltbild der Haushaltssicherung

Wie im Schemabild dargestellt, bewegt sich der Plasmabogen aufgrund der  $I \times B$ -Kraft in einen Metallkamm. Damit unterteilt sich die Entladung auf sehr viele Einzelbögen in Serie. Wird die

notwendige Minimalspannung des Bogens unterschritten, verlöscht die Entladung.

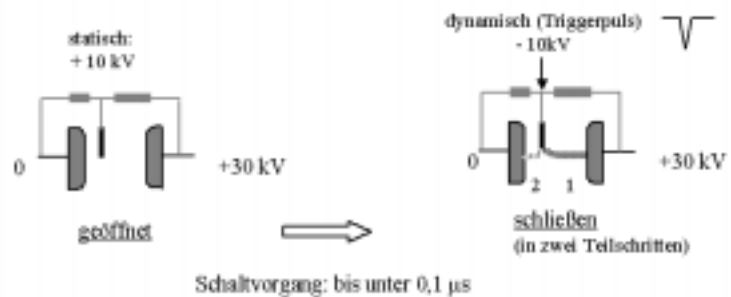
### Schließer:

Auch für das schnelle Schließen von Stromkreisen mit hohen Schaltströmen kommen Plasmaentladungen zum Einsatz. Anwendungen sind beispielsweise:

#### Kurzschluss-Schalter für Notsituationen

Mit derartigen Schaltern wird ein schneller Kurzschluss der Netzversorgung bewirkt, um im Notfall (Überspannung, interner Defekt) ein empfindliches (und teures) Gerät zu schützen. Dabei sind schnelle Schaltvorgänge erforderlich ( $t < 1\mu s$ ). Es werden beispielsweise Funkenstrecken verwendet, siehe Abbildung 13.3.

Abbildung 13.3: Arbeitsprinzip einer Funkenstrecke



## **Antriebstechnik**

Grundprinzip eines Raumfahrtantriebes ist die Impulsabgabe durch kontinuierlichen Massenausstoß. Dabei ergibt sich - außer bei der Startphase - das Problem, dass die später noch auszustoßende Masse zuvor erst mitbeschleunigt werden muss. Dies schränkt sehr schnell die verbleibende Nutzlast ein, sodass es u. U. vorteilhaft wird, für einen gewünschten Impulsübertrag weniger Masse mit höherer Austrittsgeschwindigkeit  $v_a$  auszustoßen.

Die entsprechende Optimierung zeigt, dass es speziell für Fernmissionen fast zwingend notwendig ist, zum Plasmaantrieb mit - im Vergleich zur chemischen Verbrennung - wesentlich höheren Austrittsgeschwindigkeiten überzugehen (Faktor typ. 10-50). Einsatzgebiete für Plasmaantriebe sind also: Positionssteuerung von Satelliten über großen Zeitraum und bei Fernmissionen, wobei als Energiequellen Solarpanels oder Nuklear-Aggregate verwendet werden. Die Abbildung 13.4 zeigt das Prinzip eines solchen Plasmaantriebes, der in diesem Fall auf der elektrostatischen Beschleunigung von Ionen aus einer Plasmaquelle basiert (Ionenstrahltriebwerk).

Derartige Ionenquellen werden inzwischen auch verwendet für die Oberflächenbehandlung (Ionenstrahlhärten), für Implantation von Halbleitern (Si) und für die Plasmaheizung in der Fusionsforschung ( $\Rightarrow$  Neutralteilcheninjektion). Am IPP entwickelte Injektoren mit je 4 HF-Plasmaquellen (analog Abbildung 13.4) erreichen eine Strahlleistung im Ionenstrahl von ca. 20 MW (Raumfahrtantriebe typ. 1-2 kW).

Neben Ionenstrahltriebwerken gibt es als weitere Varianten die Plasmabeschleunigung durch magnetohydrodynamische Kräfte (siehe Kapitel Magnetohydrodynamik).

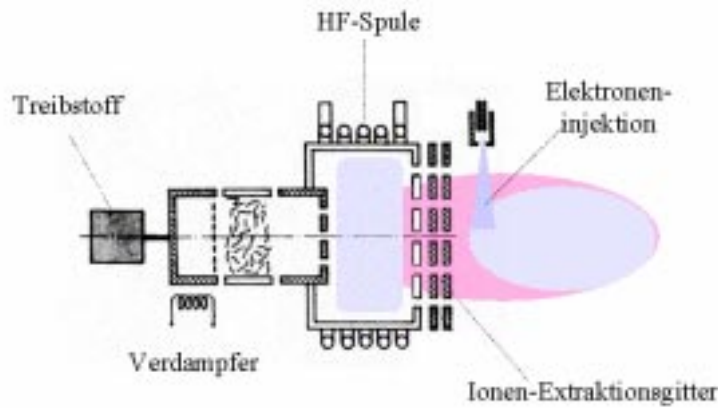


Abbildung 13.4: Ionenstrahltriebwerk mit HF-Plasmaquelle

## Wärmebehandlung/Fügetechnik

Die Plasmawärmebehandlung und Fügetechnik umfasst seit vielen Jahrzehnten gebräuchliche und allgemein bekannte Verfahren, die hier nicht weiter ausgeführt zu werden brauchen. Hier nur eine kurze Auflistung:

Schmelzen von Metallen (z. B. Schrott, auch Edelstahlherstellung) mit Bogenentladungen (Der Bogen brennt von einer bzw. mehreren Elektroden in das Schmelzgut, das die Gegenelektrode bildet. Die Leistungen liegen im MW-Bereich, in Großanlagen bei über 100 MW).

Plasmaschweißen (Trennen, Fügen von Großteilen, z. B. Schiffbau) mit Hilfe von *Plasmabrennern*. Die Leistungen betragen hier einige 100 kW bis einige Megawatt. (Im Prinzip ist natürlich auch das normale "Elektroschweißen" ein Plasmaprozess!)

Interessante Anwendungsvariante eines Plasmabrenners bildet das Plasmaspritzen zur Oberflächenbeschichtung von Werkstücken. Abbildung 13.5 zeigt den Aufbau eines solchen Plasmabrenners für das Plasmaspritzen von Pulverkeramik. Die Keramikpartikel schmelzen im Plasmastrahl (meist Argonplasma) und werden als Tröpfchen auf das Werkstück geschossen.

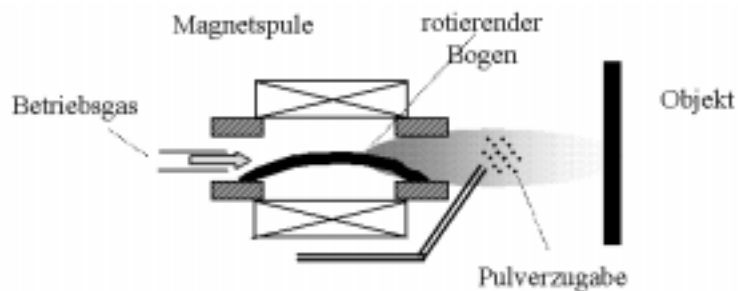


Abbildung 13.5: Arbeitsprinzip für das Plasmaspritzen

Beispiele für plasmagespritzte Produkte sind: Körperimplantate (z. B. künstliches Hüftgelenk), Flugzeug-Turbinenschaufeln uva.

## Plasmachemie

Plasmachemische Reaktionen spielen eine große Rolle bei praktisch allen technischen Plasmaanwendungen. Derartige Prozesse können in größerem Maßstab (“viele kg/h”) durchgeführt werden, um auf diese Weise z. T. neuartige chemische Produkte herzustellen (**Stoffwandlung**). Chemische Reaktionen sind aber auch entscheidend bei der Behandlung von Oberflächen (**Oberflächenmodifikation, Oberflächenbeschichtungen** oder **Oberflächenabtrag** (“Ätzen”). In diesem Fall sind bereits geringe Stoffumsätze ausreichend.

Ein Beispiel: *Beschichtung* (“Film”) von  $0,1 \mu$  auf Werkstück von  $1m^2$  in  $60s \rightarrow ca. 20 \text{ Gramm/h}$

Entsprechend der gewünschten Anwendung kommen verschiedenartige Plasmen zum Einsatz. Dabei ist eine generelle Unterscheidung zu treffen nach thermischen und nicht-thermischen Plasmaprozessen. Es gilt (s. auch Kap. “Einführung in die Plasmaphysik”)<sup>1</sup>:

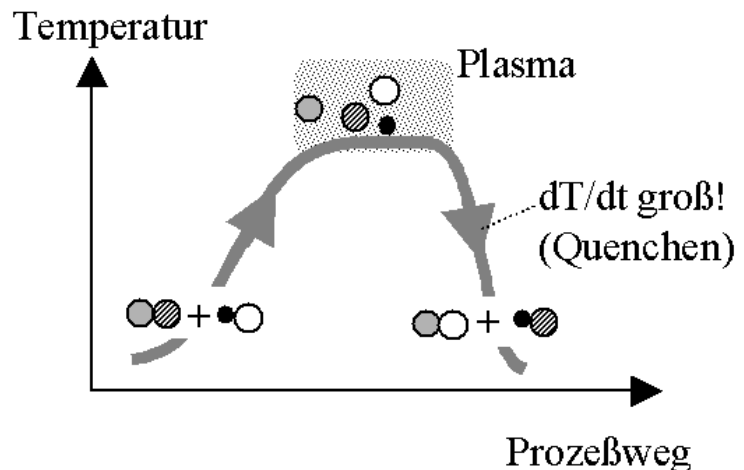
	Thermisches Plasma	Nicht-thermisches Plasma
Gasdruck	hoch: $\sim 0,5 - (>) 1 \text{ bar}$	gering: $1-100 \text{ Pa}$
$n_0$	$10^{24} - 10^{25} [m^{-3}]$	$10^{19} - 10^{21} [m^{-3}]$
$n_e$	$10^{22} - 10^{24} [m^{-3}]$	$10^{16} - 10^{20} [m^{-3}]$
T	$T_e \approx T_i \approx T_0 : 1 - 2 \text{ eV}$	$T_e \approx 2 - 10 \text{ eV} \gg T_i, T_0 \approx 0,05 \text{ eV}$
Einsatz	“einfache” chemische Verbindungen, großer Massendurchsatz! (viele kg/h)	komplexe chemische Verbindungen, geringer Massendurchsatz! (Gramm/h)

Nachfolgend sollen Details beider Plasmaprozessformen erläutert werden.

#### a.) Thermisches Plasma

Zerlegen von Eingangsstoffen in einer thermischen Plasmaentladung, Zusammenfügen der Fragmente (i. A. Atome) in neuer Anordnung durch schnelles Abkühlen (“Quenchen”). Das Prinzip der thermischen Plasmachemie bzw. Stoffwandlung lässt sich daher wie in Abbildung 13.6 darstellen.

Abbildung 13.6: Arbeitsprinzip der thermischen Plasmachemie



Beispiele für Produkte der Hochdruck-Plasmachemie sind:

Azetylenerzeugung (Vorprodukt für PVC)

<sup>1</sup>  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pascal} (= \text{Newton/m}^2)$

In einer bei Atmosphärendruck betriebenen Bogenentladung wird eingeblasenes Methangas in seine C-H-Bestandteile zerlegt, die sich in der anschließenden Quench-Zone zu Azetylen umformieren.

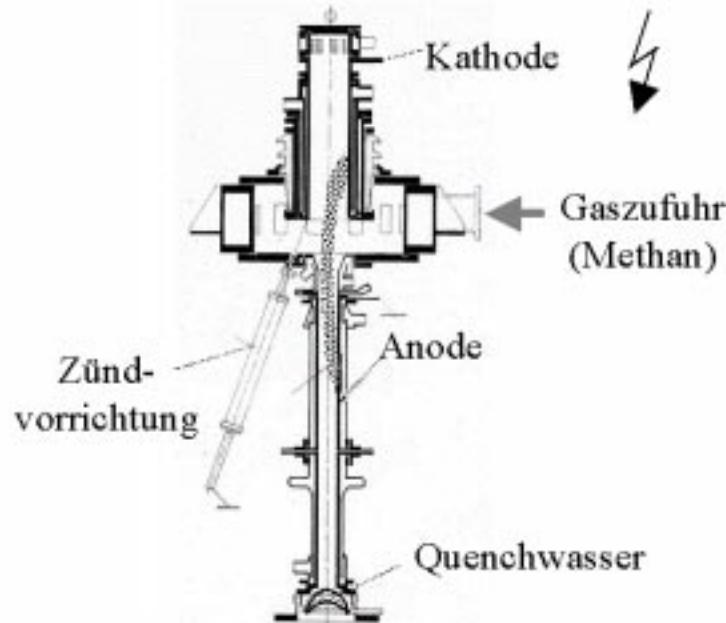


Abbildung 13.7: Prinzip einer Bogenentladung zur Azetylen-Erzeugung (Bogenleistung 6MW)

Eine weitere Anwendung ist die Herstellung von feinkörnigem Keramikpulver (“Nanopulver” mit Korngrößen im 10nm-Bereich) von Hochleistungskeramik (Metall-Nitride, -Carbide, -Oxide etc.) Nanopulver müssen dabei speziell - d. h. sehr schnell - gesintert werden, um das Anwachsen größerer Strukturen zu unterbinden (erreicht durch Mikro- bzw. mm-Wellen bei 30 GHz). Zur Herstellung dieser Pulver verwendet man wiederum thermische Bogenentladungen. Vielfach ist dies ein elektrodloser HF-Bogen (sonst evtl. Metallverunreinigungen durch Elektrodenmaterial!).

#### b.) Dichtes Plasma “nicht-thermisch”

Trotz hoher Stoßfrequenz und entsprechend schnellem Energieaustausch zwischen Elektronen und Schwerteilchen kann ein dichtes Plasma aber auch “nicht-thermisch” erzeugt werden, d. h. mit  $T_e \gg T_i; T_0$ . Dies ist offensichtlich dann der Fall, wenn die Pulsdauer extrem kurz gewählt wird. Entsprechend kurze Pulsdauern im 10 Nanosekunden-Bereich lassen sich sehr leicht mit Hilfe von **Korona-** oder **Barriere-Entladungen** realisieren, womit sich eine Reihe von Vorteilen ergibt:

- Noch relativ großer Massendurchsatz (im Vergleich zum noch zu behandelnden nicht-thermischen Niederdruckplasma)
- Komplexere Chemie möglich, da Schwerteilchen kalt bleiben und rechtzeitig aus der Reaktionszone (= Streamerkanal) “gerettet” werden können
- Einfache, billige Technik: einfache elektrische Versorgung, kein Vakuum(!)

Aus diesen Gründen gewinnen Korona- und Barriere-Entladungen in neuerer Zeit zunehmend an Bedeutung. Anwendungsbeispiele für die beiden, sehr verwandten Entladungsformen sind:

## Barriere-Entladung

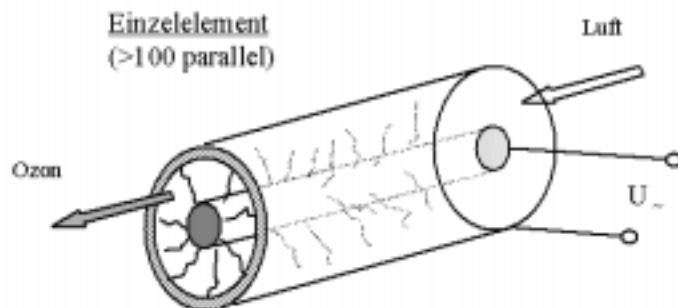
Diese Entladungsform findet inzwischen umfangreichen Einsatz für:

- Ozonerzeugung  
(z. B. für die Trinkwasserentkeimung in Großstädten)
- Stick-Oxid ( $NO_x$ )-Beseitigung  
(in Diesel-Abgasen bzw. Abgasen von Pkw- "Mager-Motoren"; derzeit noch in Entwicklung)
- Flächige UV-Lichtquellen  
(Einsatz u. A. in der Photochemie)
- Behandlung von Wolle und Textilfasern

In Abbildung 13.8 ist der Prinzipaufbau einer Ozonanlage als Beispiel für eine typische Barriere-Entladung dargestellt.

Abbildung 13.8: Wie aus dem Schemabild ersichtlich, besteht die Anlage aus zwei koaxialen Elektroden, die an der Oberfläche mit einem Isolator (i. A. Hartglas) abgedeckt sind. Von diesen Einzelreaktoren wird eine Vielzahl (einige Hundert) parallel betrieben, wobei eine Großanlage durchaus eine Gesamtleistungsaufnahme von einigen Megawatt erreichen kann

Prinzipaufbau einer Ozonanlage



Im Verlauf der technischen Entwicklung derartiger Anlagen (bzw. allgemein der Barriere-Entladung) war es die Aufgabe, die Anzahldichte der Einzelstreamer möglichst groß zu machen. Durch Übergang zu höheren Wechselfrequenzen (Kilohertz) und geeignete Dimensionierung (Isolator, Entladungsgeometrie) gelang es damit, den Massendurchsatz und den elektrischen Wirkungsgrad erheblich zu steigern (mehr als 1 Zehnerpotenz). Im Fall des Ozonisators werden in modernen Ozonanlagen jetzt fast 20% (= Verhältnis von chemischer Bindungsenergie zu elektrischer Energie) erreicht.

Ein zweites Beispiel einer Barrieren-Anwendung ist ein Woll-Behandlungsverfahren (siehe Abbildung 13.9).

Bei diesem Plasmaverfahren geht es darum, die Oberfläche von Wollfasern zu glätten. (Unbehandelt hat die Wolloberfläche die Struktur von Tannenzapfen, d. h. es kommt zu einer "mechanischen Gleichrichterwirkung". Dies führt zu einer starken Verfilzung von unbehandelten Wollstoffen. Die bisherige chemische Antifilzbehandlung kann aufgrund neuer Umweltbestimmungen in Deutschland nicht mehr ökonomisch durchgeführt werden!). Mit der Barrierebehandlung

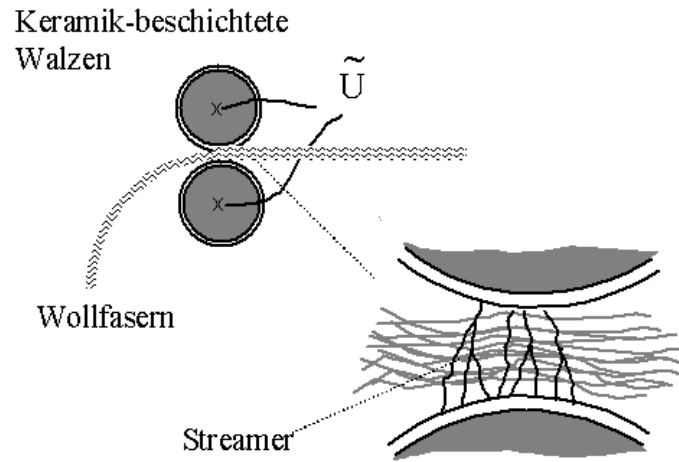


Abbildung 13.9: Wollbehandlung mit Barriere-Entladung

gelingt es, die Wollfaser auch im Inneren der durch das gezeigte Walzensystem laufenden Wollstränge zu behandeln. Als Arbeitsgas kann normale Luft (Atmosphärendruck!) verwendet werden. Nach ersten Untersuchungen ist das Ergebnis billiger und besser als das bisherige (nicht mehr zugelassene) nass-chemische Verfahren.

### Korona-Entladung

Ein technisch sehr einfaches Plasmaverfahren stellt auch die Koronaentladung dar. Die bei Atmosphärendruck betriebene Entladung dient gleichfalls zur plasmachemischen Oberflächenbehandlung von einfachen Massengütern, wie etwa:

- Behandlung von Textilien  
(Erzeugung hydrophiler oder hydrophober Oberflächen!)
- Behandlung von Plastikfolien  
(Farbhaftung!)

Ein weiterer, wichtiger Einsatz der Koronaentladung ist die

- Staubfilterung aus Abgasen von Verbrennungskraftwerken  
(in diesem Fall werden die Staub-/Rußpartikel negativ aufgeladen und über das angelegte elektrische Feld herausgezogen).

### Nicht-Thermisches Plasma (Niederdruck)

Nicht-thermische Plasmen- d. h. heiße Elektronen, kalte Neutrale und Ionen - ermöglichen interessante, z. T. völlig neuartige Chemieprodukte (allerdings nur in kleineren Mengen). Besonders wichtig ist zugleich die Chemie an Oberflächen bei der Deposition spezieller Schichten bzw. beim Plasmaätzen. Dabei sind im Fall des nicht-thermischen Plasmas die energetischen Elektronen für die diversen Molekül-Reaktionen des Precursor-Gases verantwortlich. Im - nur teilionisierten - nicht-thermischen "Niedertemperaturplasma" findet man die folgenden Spezies:

- (neutrale) Radikale.....z. B.  $CH_4 \rightarrow CH_3 + H$



- Atome.....z. B.  $H_2 \rightarrow H + H$
- Molekülonen (bzw. Radikal-Ionen)...z. B.  $H_2 \rightarrow H_2^+$
- negative Ionen.....z. B.  $H \rightarrow H^-$
- (positive) Ionen + Elektronen.....z. B.  $H \rightarrow H^+ + e$

## Plasma-Oberflächen- & Dünnschichttechnik

Die Behandlung von Oberflächen ist die derzeit wirtschaftlich wichtigste Plasmaanwendung. Dabei sind 3 Einzelbereiche zu unterscheiden:

- Modifikation von Oberflächen  
(z. B. Farbhaftung, Verklebbarkeit, Biokompatibilität, hydrophobe/hydrophile Behandlung, Oberflächenhärtung)
- Abscheiden dünner Filme  
(Schutz- und Funktionsschichten)
- Plasmaätzen  
Strukturierung von Oberflächen in Mikroelektronik und -mechanik)

Dabei sind die wesentlichen Verfahren:

### Korona-Entladung bei Atmosphärendruck

→ Billige Massenprodukte (z. B. Behandlung von Plastikfolien zum Bedrucken, Behandlung von Textilien und Wolle). Zur Zeit Erforschung weiterer Anwendungsmöglichkeiten (*besondere Vorteile: kein Vakuum, technisch einfach!*)

### Nicht-thermische Niederdruckplasmen: DC, NF, HF, Mikrowelle

Die wichtigsten industriell eingesetzten Verfahren sind:

- **PVD** = “physical vapor deposition”
- **PCVD** = “plasma (enhanced) chemical vapor deposition”
- **Plasmapolymerisation**
- **Ionen Immersions Technik**
- **Plasma Etching**

	<b>PVD</b>	<b>PCVD</b>	<b>Plasma- polymerisa- tion</b>	<b>Ionen Immersion</b>	<b>Plasma Ätzen</b>
Temperatur [°C]	100-500	300 (600-700)	20-100	20-200	20-200 (-30)
Plasma- erzeugung	HF, DC (Bogen)	HF, MW DC gepulst	HF, MW	HF+ DC gepulst	HF, MW (DC)
Druck [Pa]	0,01-1	0,1-10 (100-1000)	1-100	0,1-1	0,1-100
Arbeitsgase	$N_2, O_2, H_2$ $CH_4, C_2H_2$ Metallatome	$N_2, O_2, H_2$ $CH_4, C_2H_2$ $TiCl, SiH_4$	$C_xH_y$ - Monomere	$N_2, O_2$ $C_xH_y$	$F - /Cl - /Br$ - Gase $Ar, H_2$
Schichtarten	$TiN, TiC$ Metalle, M.-Oxide	$TiN, TiC$ $SiO_2, a - C : H$ ( $C_{Diamant}$ )	$C - H$ -Polymere	Metallober- flächen	$Si, SiO_2, SiN,$ $GaAs$ Metalle
typ. Schichtdicke [μ]	1-10	1-10	1-100	0,1-1	(-)0,1-100

Die Tabelle gibt einen Überblick über die wesentlichen Prozessparameter (Art und Erzeugung des Plasmas, typische Schichtsysteme) der hier aufgeführten Oberflächen- und Dünnschichtverfahren.

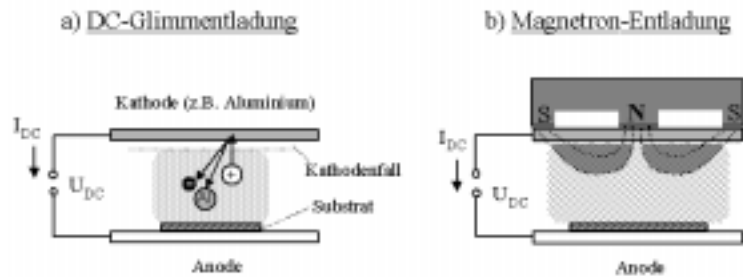
Nachfolgend sollen diese Oberflächentechniken etwas mehr ins Detail gehend erläutert werden:

## Physical Vapor Deposition (PVD)

Die PVD-Technik ersetzt das bekannte Vakuumverdampfen von Metallschichten auf Oberflächen. Vorteile sind: wesentlich bessere Schichtqualität (dichtere Schichten), wesentlich bessere Schichthaftung und Homogenität über sehr große Flächen (z. T. viele  $m^2$ ). Statt der Verdampfung werden die Metallatome durch Beschuss mit energiereichen Plasmaionen (i. A. Argonionen) aus einem Metalltarget (Kathode) herausgelöst (physikalisches Sputtern). Im einfachsten Fall wird eine DC-Glimmentladung verwendet. Wesentliches Problem dabei sind die relativ geringen Ionenflüsse bei mäßigen Betriebsspannungen (einige hundert Volt). Bei höheren Spannungen (= höhere Flüsse) erreicht die Ionenenergie für das Sputtern zu hohe Werte (Ionen dringen zu tief ein, Sputterausbeute geht wieder zurück). Wesentliche Verbesserung (intensiveres Plasma, "Hochraten-Sputtern") erhält man durch magnetischen Einschluss der Elektronen im Kathodenbereich ("Magnetronsputtern"). Die Ionen sind dabei (praktisch) nicht beeinflusst, da ihr Gyroradius zu groß ist. Abbildung 13.10 zeigt die beiden Verfahren (einfaches Glimmsputtern, Magnetronsputtern) im Vergleich. Technisch interessant ist auch das reaktive Magnetronsputtern. In diesem Fall wird ein reaktives Plasma (u. U. mit Argonzusatz) verwendet. Die gesputterten Metallatome gehen beim Durchlauf durch das Plasma eine chemische Bindung ein und werden entsprechend als Keramiksicht abgeschieden (Beispiel: Titansputtern in einem Stickstoffplasma zur Abscheidung von Titan-Nitrid). Anstelle einer DC-Entladung werden Magnetrons vielfach auch mit Hochfrequenz betrieben (*HF-Magnetron*). Vorteil ist die weiter verbesserte Homogenität über Meter-Dimensionen. In Magnetronentladungen werden Beschichtungsraten bis zu  $1\mu m/s$  erreicht. Wichtige Anwendungen sind: Metallschichten auf

Gläsern (“Architekturglas”, IR-reflektierendes Glas (d. h. Wärmedämmglas) mit Dimensionen bis  $3 \times 6\text{m}$ , Beschichtung von Werkzeugen (Bohrer, Schneidwerkzeuge) und Gebrauchsgegenstände (Uhren, Schmuck) mit  $TiN$  (sehr harte “Goldschicht”).

Abbildung 13.10: Vergleich von Sputter-Verfahren, Glimmentladung, Magnetron-Entladung



## Plasma (Enhanced) Chemical Vapor Deposition (PCVD, PECVD)

PCVD-Verfahren ersetzen bzw. ermöglichen CVD-Anwendungen bei tiefen Temperaturen (Anmerkung: Chemical Vapor Deposition ist eine umfangreich genutzte Technik zu Deposition harter oder korrosionshemmender Schichten auf metallischen Gegenständen. Je nach Schichtart sind dabei aber Temperaturen des Werkstücks von 700 bis über  $1000^\circ\text{C}$  erforderlich (“Chemie an der heißen Oberfläche”). Bei der PCVD ersetzt das Plasma die heiße Oberfläche (Plasma-chemische Reaktion), sodass die Oberflächentemperatur bei  $100\text{-}200^\circ\text{C}$  gehalten werden kann. Damit sind erstmals temperaturempfindlichere Werkstücke der CVD-Technik zugänglich (z. B. Gläser, Kunststoffe, Metallteile nach Fertigung bzw. Verformung).

Für das PCVD-Verfahren kommen alle Entladungsformen zum Einsatz, d. h. DC-, HF- und Mikrowellenentladungen. Die genaue Auswahl ergibt sich dabei aus spezifischen Anwendungsvorteilen.

Die normalerweise erzielbaren PCVD-Beschichtungsraten liegen bei typ.  $50\text{ nm/s}$  bis max.  $200\text{ nm/s}$ .

wichtige Anwendungen sind:

- Hartstoffschichten aus  $TiN$  und  $TiC$  (in Konkurrenz zum PVD), “Diamond-like Carbon” (a-C:H-Schichten)
- Polykristalline Diamantschichten

*Zur Diamantabscheidung:*

*Die Diamantabscheidung benötigt als Voraussetzungen eine sehr hohe (ca.  $600\text{-}800^\circ\text{C}$ ) Substrattemperatur, einen hohen Anteil an atomarem Wasserstoff im Plasma, sowie eine nur geringe Energie der auf das Substrat treffenden Ionen (ca.  $10\text{-}20\text{ eV}$ , also dem ambipolaren Potential entsprechend). Der Mechanismus ist wie folgt: Kohlenstoff wird bevorzugt in der (hier unerwünschten) graphitischen  $sp_2$ -Phase abgeschieden. Durch hohe Substrattemperatur bei hohem atomarem Wasserstofffluss wird die  $sp_2$ -Koordination schneller weggeätzt als die langsame raumzentrierte Diamantphase ( $sp_3$ ) aufwächst, sodass die letztere gewinnt. Mit dem Wegätzen von  $sp_2$  werden dabei immer neue freie Bindungen geschaffen, an die Diamantkoordination andocken kann. Im Ergebnis folgen allerdings nur sehr kleine Wachstumsraten von  $1\text{-}2\ \mu\text{m/h}$  für hochreine Diamantschichten. Inzwischen werden auch bis mm dicke Diamantscheiben mit bis  $12\text{cm}$  Durchmesser hergestellt (IR- und mm-Wellen-Fenster).*

Gebräuchlich für hoch-qualitativen Diamant ist die Mikrowellenentladung (z. T. auch mit Magnetfeldunterstützung). Als reaktives Gas wird eine geringe Minorität von Methan oder Azetylen (1-2% Anteil) in Wasserstoff eingesetzt. Ein kleiner Zusatz an Sauerstoff begünstigt das Ätzen der Graphitphase.

- Optische Schichten (i. A. mit mehreren Funktionen: 1.) Optische Anpassung (Antireflexionsschicht, teilweise auch für den IR-Bereich), 2.) Korrosionsschutz und 3.) Kratzschutz (Beispiel:  $SiO_2$  und  $SiON$ , für IR-Bereich: a-C:H))
- Tribologische Beschichtungen: Schichten mit extrem geringem Reibungskoeffizienten (schmierölfreie Lager für den Einsatz im Vakuum oder bei hohen Temperaturen)
- Magnetische Speicherschichten
- Diffusionssperrschichten für chemische Trennprozesse
- Photovoltaische Schichten (= aktive Photoschichten wie a-Si:H, oder auch nur Schutz- und Antireflexionsschichten für PV-Zellen (s. Pkt. 2 oben))

## Plasmapolymerization

Bei der Plasmapolymerisation werden Schichten mit komplexen chemischen Strukturen abgeschieden (Bildung von Radikalen im Plasma, Oberflächenreaktionen). Derartige Schichten werden für biomedizinische Zwecke entwickelt (Zellwachstum auf Implantaten oder Verhinderung von Zellanlagerung in künstlichen Blutgefäßen u. ä.).

In der Regel werden wieder Mikrowellenplasmen eingesetzt.

## Ionen-Immersionstechnik (PIII)

Bei der Ionenimmersion (PIII = Plasma Ion Immersion Implantation) wird ein zu behandelndes metallisches Werkstück in ein stationäres (DC-, HF- oder MW- erzeugtes) Niederdruckplasma gegeben. Dann wird eine hohe negative Pulsspannung auf das zu behandelnde Teil geschaltet. Mit dieser Saugspannung werden die Ionen aus der stationären Plasmarandschicht abgezogen und mit entsprechender Energie auf bzw. in die Oberfläche geschossen. Die typischen Ionenenergien liegen dabei im Bereich von 5 bis (über) 100 keV (im Gegensatz zur ambipolaren Randschicht des stationären Plasmas von wenigen 10 eV). Ziel des Ionenbeschusses ist die Implantation und Oberflächenhärtung, wie sie sonst (Konkurrenzmethode) durch separate Ionenquellen erreicht werden kann.

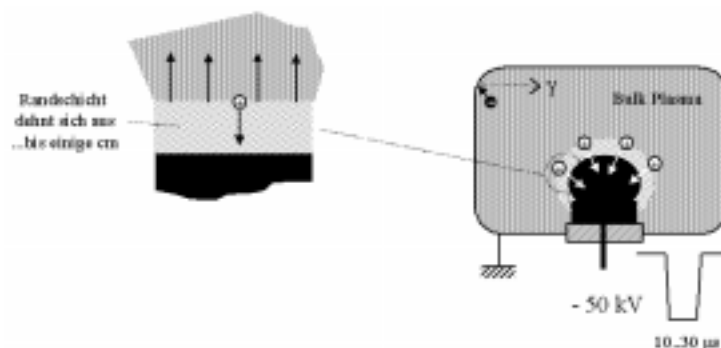


Abbildung 13.11: Arbeitsprinzip der Ionen-Immersionstechnik

Wie in Abbildung 13.11 angedeutet, dehnt sich die Randschicht während des Pulses (durch Absaugen der Ionen und Wegtreiben der Elektronen stark aus und kann (bei hoher Pulsspannung und entsprechender Pulsdauer) Werte im cm-Bereich annehmen (statt einiger Debye-Längen, d. h.  $< mm$ ). Mit der Schichtdynamik folgt auch eine unterschiedliche Ionenenergie (bis hin zum Maximalwert). Die Obergrenze für die Pulsspannung ergibt sich aus dem Auftreten von Durchschlägen durch die Randschicht (lokale Bögen).

## Plasmaätzen (Plasma Etching)

Moderne, hochintegrierte Bausteine (Prozessoren, DRAM-Speicher) können nur über Plasmaverfahren hergestellt werden. Dabei kommen sowohl Filmdeposition und (insbesondere Ätztechniken) zur Anwendung. Abbildung 13.12 zeigt als Beispiel einen Trench im Grenzbereich moderner Ätztechnik: die Querdimension liegt im "sub- $\mu m$ "-Bereich, das "Aspektverhältnis" (= Tiefe/Breite) beträgt ca. 16.

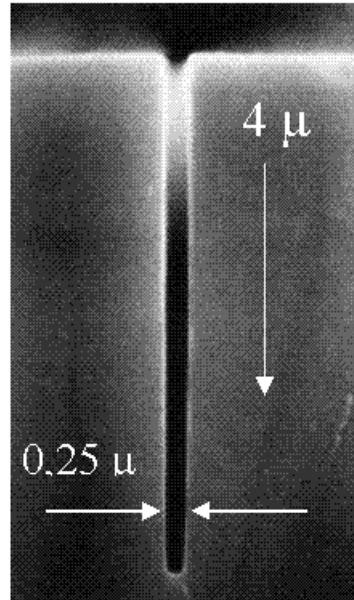


Abbildung 13.12: REM-Aufnahme eines plasmageätzten Grabens ("Trench")

Derartige Trenchschnitte dienen zur Herstellung von Kondensatoren für die ja/nein - Information (= aufgeladen/leer). Da bei zunehmender Miniaturisierung eine Minimalladung gespeichert werden muss (sonst Störungen durch äußere Ereignisse, wie Höhenstrahlung!), muss in die dritte Dimension gegangen werden, d. h. der vertikale Trench. Zum Kondensator gehört weiter der Schalttransistor für die Aufladung bzw. Ladungsabfrage. Mit der neuen Technologie wird auch dieser zunächst planare Transistor jetzt in die Tiefe gebaut (moderne, hochintegrierte DRAM's), vgl. Abbildung 13.13.

Derartige Strukturen lassen sich mit dem alten Verfahren des nass-chemischen Ätzens nicht erreichen, hier setzt die Plasmatechnik ein, die - im Gegensatz zur isotropen Chemie - das anisotrope Plasmaätzen, vgl. Abbildung 13.14.

Weitere Details zum Plasmaätzen:

Abbildung 13.13: Prinzipaufbau eines 3-dimensionalen Transistors

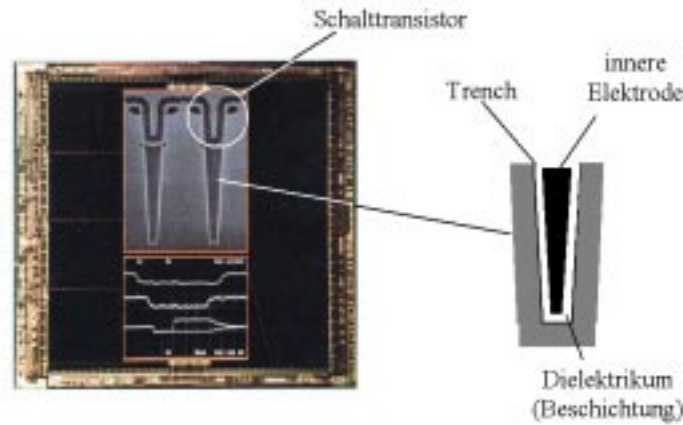
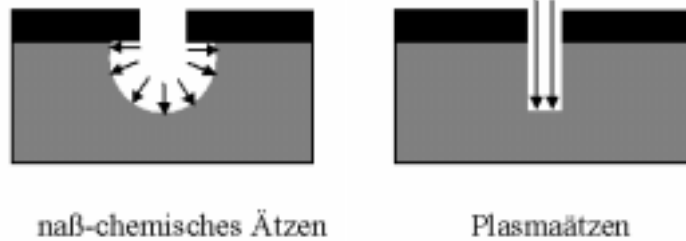


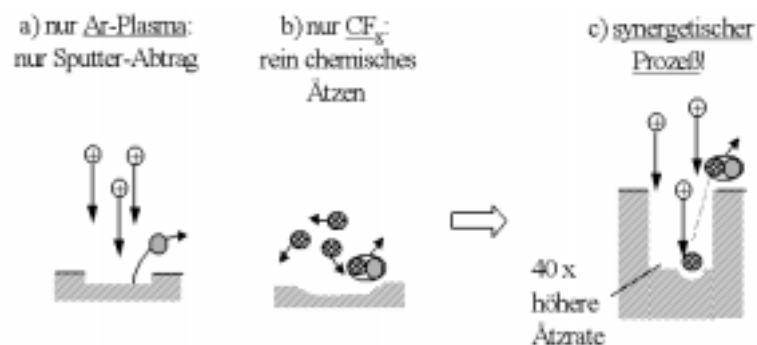
Abbildung 13.14: Vergleich der Prinzipien von naß-chemischem und anisotropem Plasmaätzen



### “Reaktives Ionen-Ätzen (reactive ion etching)”

Die in der Anfangsphase des sogenannten “Trockenätzens” eingesetzte Technik, das reaktive Ionen-Ätzen (**RIE**), verwendet nach wie vor die Chemie, d. h. es wird ein reaktives Gas (in der Regel Kohlenstoff-Halogenide bzw. Kohlen-Wasserstoff-Halogenide) eingesetzt. Dieses hat unter Normalbedingungen aber eine sehr geringe (und natürlich isotrope!) Ätzwirkung. Die hohe Ätzrate erhält man erst durch das Zusammenwirken mit Edelgasionen (i. A. Argonionen) aus dem Plasma, die die nötige Schwellenergie (Aktivierungsenergie) für den chemischen Prozess einbringen. Da die Ionen senkrecht auf die Oberfläche einfallen, ergibt sich dabei zugleich aber auch die gewünschte Anisotropie des Ätzprozesses. Diese synergetische Wirkung von Argonionen und dem reaktiven (neutralem) Ätzgas (hier  $CF_4$ -Molekülen bzw.  $CF_3$ -Radikalen) wurde erstmals durch den klassischen Versuch von Coburn (IBM) aufgeklärt, (vgl. Abbildung 13.15). Beim reaktiven Ätzen liefert das Ion die Aktivierungsenergie für den chemischen Prozess und bewirkt zugleich die geforderte Anisotropie. Dabei kann der Druck (Dichte) des Ätzgases relativ hoch (typ. 10 Pa und mehr) gewählt werden (= höhere Ätzrate!).

Abbildung 13.15: Synergie von Sputtern (Ar-Ionen) und chemischem Ätzen ( $CF_x$ )



Für weiter verkleinerte Ätzstrukturen ist eine nochmals verbesserte Anisotropie des Ätzprozesses erforderlich. Hierzu wurden zwei Wege beschritten:

- reaktives Plasmaätzen bei kryogenen Temperaturen (= weitere Unterdrückung des noch geringfügig vorhandenen lateralen chemischen Ätzens)
- reaktives Plasmaätzen mit Beimischung von  $CH_x$ -Gasen. Dadurch Deposition von CH-“Schutz“-Schichten auf den Seitenwänden (= Passivierung!)

### Direktes Ionenätzen

Die RIE-Technik stößt bei dem Versuch weiterer Miniaturisierung (“sub-Mikron-Technik”) auf ihre Grenzen. Grund sind die zu engen Kanäle, die bei den höheren Gasdichten (etwa 100 Pa) des RIE-Verfahrens kein freies Abströmen der flüchtigen Ätzprodukte ermöglichen. Der Ausweg war, zu wesentlich geringeren Gasdichten überzugehen und zugleich ein **direktes Ionenätzen** zu erreichen (“stoßfreie Ionen”). Dabei ist das chemisch aktive Molekül (z. B.  $CF_x$ ) jetzt zugleich ionisiert ( $CF_x^+$ ) und bringt durch direkte Beschleunigung in der Randschicht die benötigte Reaktionsenergie selbst mit, bewirkt zugleich aber auch den anisotropen Ätzprozess. Schwierigkeiten bereitet allerdings, bei sehr Gasdrücken im Bereich von 0,1-1 Pa ein gut ionisiertes Plasma aus Radikationen zu erzeugen, um hinreichend hohe Ätzraten (einige nm/s) zu bewirken. Wegen der zunehmend größeren Wafer-Abmessungen wird es zugleich auch immer schwieriger, die entsprechende Plasmahomogenität zu gewährleisten.

ECR-Plasmen ermöglichen eine leichte Zündung und sehr effiziente Heizung auch bzw. gerade bei diesen geringen Ausgangsdichten, haben - im Fall des “Standard-ECR-Reaktors” - aber Probleme bei der Homogenität. Probleme bereitet auch das im Substratbereich divergente Magnetfeld, da die Feldlinien (bei voller Ausnutzung des Querschnitts) in Randgebieten schräg auf das Substrat treffen. (*Durch komplizierte Spulenanordnungen könnte man dies allerdings vermeiden!*)

Daher werden neuerdings zunehmend auch induktiv betriebene HF-Plasmen (“inductively coupled plasma” (**ICP**)) verwendet, die mit einer spiralig aufgewickelten, planaren HF-Spulen betrieben werden (Abbildung 13.16).

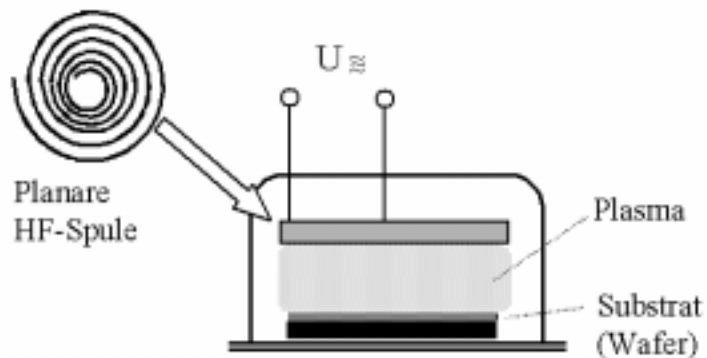


Abbildung 13.16: Induktive HF-Entladung mit planarer HF-Spule

Dabei gewährleistet die induktive Einkopplung die jetzt erforderlichen nicht zu hohen Ionenenergien. Die neue Koppeltechnik mit planarer HF-Spule ermöglicht zugleich großflächig homogene Plasmen (vgl. Abbildung 13.16). Schwierig ist jedoch der Betrieb (Zündung) bei geringen Gasdichten.